UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. A. Melcher

WS 2006/2007
20. November 2006

5. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe H1

(a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil, Betrag und Argument von $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{201}$.

(b) Welche Kurve wird durch $\left|\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-i)z-3\right|+\left|\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-i)z+3\right|=10$ in der komplexen Ebene beschrieben ? Man interpretiere das Ergebnis geometrisch.

(c) Sei $n\in\mathbb{N}$ und $\epsilon := \cos\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$. Man zeige, daß $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \prod_{k=1}^{n-1}(z-\epsilon^k)$ für alle $z\in\mathbb{C}$ gilt ! (Hinweis: Betrachte $z^n=1$.)

(d) Mit Hilfe von (c) zeige man: $n = 2^{n-1}\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ und $2n+1 = 2^{2n}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$.

Aufgabe H2 Man bestimme sämtliche Lösungen folgender Gleichungen:

(a) $z^6+1=0$, (b)$z^4+8(1-\sqrt{3}i)=0$, (c) $iz^2-(1+3i)z+2+2i=0$, (d)$z^2(1-z^2)=16$.

Aufgabe H3 Gegeben sind ein Vektorraum V und drei Vektoren in V. Prüfen sie jeweils die Vektoren auf lineare Unabhängigkeit.

(a) $V=\mathbb{R}^3: \vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}$ $\vec{c}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}$.

(b) $V=\mathbb{R}^3: \vec{a}=\vec{x}\times\vec{y},\ \vec{b}=\vec{x}\times\vec{z},\ \vec{c}=\vec{y}\times\vec{z}$, wobei $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^3$ sind.

(c) V = Menge der Polynome vom Höchstgrad 2.
$f(x)=1-x+2x^2,\ g(x)=2-x^2,\ h(x)=-1+3x-7x^2$.

Aufgabe H4 Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ feste Vektoren. Zeigen Sie, daß genau dann $\vec{a}=\vec{b}$ gilt, wenn $\vec{a}\cdot\vec{x}=\vec{b}\cdot\vec{x}$ ist für alle $\vec{x}$.

Aufgabe T1

(a) Bestimmen Sie Real-, Imaginärteil, Betrag und Argument von $(1+i)^{2n}+(1-i)^{2n}$.

(b) Man bestimme und skizziere die folgenden Mengen in der komplexen Ebene:

$$\text{(i)}\quad M_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 - Re\ z\}, \quad \text{(ii)}\ M_2 := \left\{ z \in \mathbb{C} :\ Re\,\frac{1}{z} = \frac{1}{2} \right\}.$$

(c) Es sei $1 \leq p < n \in \mathbb{N}$ und $\epsilon := \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

Man bestimme $\sum_{k=1}^{n-1} \epsilon^{kp}$ und $\prod_{k=0}^{n-1} \epsilon^k$.

(d) Welche geometrische Abbildungen in der Ebene beschreiben die folgenden Funktionen auf $\mathbb{C}$:

$$\text{(i)}\quad z \mapsto z + 4 - 2i, \quad \text{(ii)}\ z \mapsto (1+i)z, \quad \text{(iii)}\ z \mapsto -3\bar{z} \quad \text{(iv)} z \mapsto \frac{1}{z}.$$

Aufgabe T2 Man bestimme alle Lösungen folgender Gleichungen:

(a) $z^4 - 2z^2 + 2 = 0$, (b) $\bar{z} = 4z^3$, (c) $z^3 - z^2 + 2 = 0$, (d) $z^3 = \dfrac{4+i}{3+5i}$.

Aufgabe T3

(a) Sei V ein beliebiger Vektorraum mit linear unabhängigen Vektoren $\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z} \in V$. und $\vec{a} = \vec{x} + 2\vec{y} - \vec{z},\ \vec{b} = -\vec{y} + 2\vec{z},\ \vec{c} = -2\vec{x} + \vec{y}$, Man untersuche $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ auf lineare Unabhängigkeit.

(b) Weisen Sie nach, daß sich die drei Seitenhalbierenden eines nichtentarteten Dreiecks ΔABC in einem Punkt S schneiden. In welchen Verhältnis teilt S die Seitenhalbierenden ?

Aufgabe T4 In $\mathbb{R}^3$ sind die zwei Geraden g und h gegeben durch

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R} \text{ und } h : \vec{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}.$$

(a) Zeigen Sie, daß die beiden Geraden weder parallel sind, noch schneiden sie sich nicht.

(b) Sei E die Ebene die g enthält und parallel zu h ist. Geben Sie die Hessesche Normalform von E an.

(c) Welchen Abstand hat die Gerade h von der Ebene E.

(d) Sei P der Punkt auf h der von g den geringsten Abstand hat, Bestimmen Sie Koordinaten von P.

Hinweis Die Aufgaben H1-H4 werden in der Hörsaalübung und die Aufgaben T1-T4 in den Tutorien besprochen.