UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. A. Melcher

WS 2006/2007
1. Dezember 2006

7. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe H1

(a) Es sei $a_n = \dfrac{1+q+q^2+\ldots+q^n}{1+q^2+q^4+\ldots+q^{2n}}$, $|q|<1$. Man bestimme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$!

(b) Gegeben sei die Folge (a_n) mit $a_1 = 3,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n+12}$ für $n \geq 1$. Man zeige daß die Folge konvergiert und bestimme den Grenzwert a.

(c) Man berechne $G = \lim\limits_{n\to\infty} = \sqrt{n}\left(1-\sqrt{1-\sin(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}\right)$.
(Hinweis: Untersuche zuerst $a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.)

Aufgabe H2 Gegeben ist die relle Rekursion $x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a,\ y_{n+1} = 2x_ny_n + b$.

(a) Bestimmen Sie eine komplexe Formulierung für die Rekursion.

(b) Gegeben sei jetzt die komplexe Rekursion $z_{n+1} = z_n^2 + c,\ c \in \mathbb{C}$.

(i) Bestimmen Sie für $c = 0$ alle Anfangswerte z_0 für die $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ gilt.

(ii) Bestimmen Sie für $c = 0$ alle Anfangswerte z_0 für die $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \neq 0$ gilt, aber die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt bleibt.

(Hinweis: Polarkoordinaten)

(d) Recherchieren Sie die Begriffe Juliamenge, Mandelbrotmenge bzw. Apfelmännchen.

Aufgabe H3 Bestimmen Sie die Häufungspunkte aller nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und geben Sie $\liminf(a_n)$ und $\limsup(a_n)$ an, gegebenfalls auch den Grenzwert bzw. konvergente Teilfolgen.

(a) $a_n = \dfrac{3n^2+\sqrt{n^3+2}}{n^2-n+1}$, (b) $a_n = \sqrt[n]{2^n+3^n}$, (c) $a_n = \left(1+\dfrac{(-1)^n}{2n}\right)^{3n}$.

(d) Die Folge (a_n) sei rekursiv definiert durch $a_0 = 0,\ a_{2n} = \frac{1}{2}a_{2n-1},\ a_{2n+1} = \frac{1}{2} + a_{2n},\ n \in \mathbb{N}_0$. Man bestimme alle Häufungspunkte.

(e) Zeigen Sie daß die durch $a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ und $b_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ definierten Folgen $(a_n),\ (b_n)$ eine Intervallschachtelung $([a_n, b_n])$ für die Zahl e bilden.

Aufgabe H4 Wir betrachten die rekursiv definierte Folge $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$.

(a) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ wofür der Ansatz $x_n = a^n, n \in \mathbb{N}$ die Rekursion erfüllt ?

(b) Wenn $x_n = a_1^n$ und $y_n = a_2^n$ die Rekursion erfüllen dann auch die Linearkombination $c_1a_1^n + c_2a_2^n$? (Begründung).

(c) Für $x_0 = x_1 = 1$ bestimme man ein a, daß der Rekursion genügt.

(d) Informieren Sie sich über die Fibonacci-Zahlen.

— bitte wenden —

Aufgabe T1

(a) $G = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^{2^k}}\right)$

(b) Bestimme ein $N \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n > N$ gilt: $a_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2-1} < \frac{1}{2000}$.

(c) Man untersuche $a_n = \sqrt{25n^2+49n-10} - 7n$ und $b_n = \sqrt{49n^2+25n-10} - 7n$ auf Konvergenz. In Falle der Konvergenz bestimme man den Grenzwert.

Aufgabe T2

(a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei gegeben durch

$$a_1 := 1,\ a_2 := \sqrt{2+\sqrt{2}},\ a_3 := \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots.$$

Untersuchen Sie die Folge auf Monotonie und Konvergenz.

(b) Es sei $a_n := \sqrt[n]{n!}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß die Folge (a_n) streng monoton wachsend ist und bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$.

Aufgabe T3 Entscheiden Sie jeweils durch Beweis oder Gegenbeispiel ob die Folge (a_n) konvergiert, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für alle $n > n_0$ gilt:

(a) $|a_n - a_{n+1}| < \epsilon$, (b) $|a_n| < 2\epsilon^2$, (c) $|a_n + a_{n+1}| < \epsilon$, (d) $|a_n a_{n+1}| < \epsilon$.

Man bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe T4 Bestimmen Sie sämtliche Häufungspunkte der Folge $(a_n) \subset \mathbb{C}$, sowie jeweils eine konvergente Teilfolge. Im Falle der Existenz von Häufungspunkten bestimme man weiter den $\limsup(a_n), \liminf(a_n)$ sowie den Grenzwert.

(a) $a_n = 2^{1-n}(\sqrt{3}+i)^n$, (b) $a_n = \left(\frac{n-2}{n+3}\right)^{2n+3}$, (c) $a_n = \sqrt{n^2+2n} - n + i2^{-n}n$.

Hinweis: Die Aufgaben H1-H4 werden in der Hörsaalübung und die Aufgaben T1-T4 in den Tutorien besprochen.

Informationen zur 1. Übungsklausur: Die Klausur findet am **Samstag, den 09.12.2006 von 08.00-10.Uhr** statt.

Hörsaalverteilung:

Fachrichtung	Anfangsbuchstabe Nachname	Hörsaal
Physik/Chemie	(A-J)	HMU
Physik/Chemie	(K-Z)	HM0
ETEC/Geodäsie	(A-0)	Gerthsen
ETEC/Geodäsie	(P-Z)	HS 37

Die Klausuren können ab Dienstag, den 19.12.2006 im Sekretariat (Zi.312) abgeholt werden. Am Mittwoch, den 20.12.2006 findet von 13.15-13.45 Uhr im S 31 eine Meckerstunde statt.

Hinweise: Zu den Klausuren mitzubringen sind Studienausweis und Schreibgerät; Papier wird gestellt.

Zulässige Hilfsmittel sind alle Arten mathematischer Literatur und geheftete Blätter (z. B. Mitschriften, Übungsbltter, alte Klausuren). Nicht zugelassen sind einzelne Blätter und elektronische Hilfsmittel (z.B. Laptops,Taschenrechner,Mobiltelephone,...).