Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Muzzulini

WS 2007/2008

4. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (Ü) Bestimmen Sie jeweils alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt:

a) $|2x| > |6 - 2x|$ **b)** $|x-2| \cdot |x+2| = 2$

c) $3x(1+|x|)^{-1} < 4x^2$ **d)** $\big|7 - |x-5|\big| \leq 3$

Aufgabe 2 (T) Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$:

a) $A = \{\, z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z - i| \text{ und } |z - i - 1| \leq 1 \,\}$

b) $B = \{\, z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z| < 3 \text{ und } \frac{2}{3}\pi < \arg z < \frac{4}{3}\pi \,\}$

Aufgabe 3 (T) Bestimmen Sie jeweils alle $z \in \mathbb{C}$, die Lösungen der Gleichung sind:

a) $z^2 - 2z + 3 = 0$ **b)** $\overline{z} = z^3$

c) $z^5 = 1 - i$ **d)** $z^3 = (6i - 10)/(4 + i)$

Aufgabe 4 (T) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, die Lösungen der Gleichung

$$z^3 - (3-i)z^2 - iz + 1 + 3i = 0$$

sind. (Hinweis: Es gibt Lösungen der Gleichung auf der Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten.)

Aufgabe 5 (T) Es seien $w, z \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie: $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$. Was bedeutet dies geometrisch?

Aufgabe 6 (Ü)

a) Bestimmen Sie Realteil und Imaginärteil von $(1+i)^{10}$.
Hinweis: Berechnen Sie die Polardarstellung von $(1+i)$.

b) Bestimmen Sie Realteil und Imaginärteil von

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{i}{2}\right)^k$$

Hinweis: Beutzen Sie die Formel für geometrische Summen.

Aufgabe 7 (Ü) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Folge.

a) Machen Sie sich klar, was die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n := a_{n+1} - a_n$ beschreibt.

b) Zeigen Sie: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, dann konvergiert $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0.

c) Gilt auch umgekehrt, dass aus $d_n \to 0$ folgt, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert?

d) Was können wir schließen, wenn $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert und $d_n \geq 0$ für gerade n und $d_n \leq 0$ für ungerade n?

e) Was gilt, wenn außerdem $(|d_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fällt?

Aufgabe 8 (T) Finden Sie Beispiele für Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die folgende Eigenschaften haben:

a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat genau die Zahlen 1 und -1 als Häufungspunkte.

b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat jede ntürliche Zahl als Häufungspunkt.

c) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat keinen Häufungspunkt und ist weder nach oben noch nach unten beschränkt.

d) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 2007, aber nicht monoton.

e) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat 0 als einzigen Häufungspunkt, jedoch konvergiert $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht.

Aufgabe 9 (Ü) Untersuchen Sie folgende rekursiv definierten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf konvergenz. Bestimmen Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert:

a) $a_1 = 1, \ a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$.

b) $b_1 = 1, \ b_{n+1} = 1 + \frac{1}{b_n}$.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die mit (Ü) gekennzeichneten Aufgaben besprochen, in den Tutorien die mit (T) gekennzeichneten Aufgaben.