Aufgabe 1 **a)** Hier kann man die Regel von de l'Hospital zweimal anwenden (jeweils „$\frac{\infty}{\infty}$“ und die Ableitung des Nenners ist für hinreichend große x ungleich 0). Dies führt auf

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\qquad\text{(falls die Grenzwerte existieren),}$$

hilft also nicht, den Grenzwert zu berechnen. Einfaches Kürzen mit e^x liefert aber

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=\frac{1-0}{1+0}=1\,.$$

b) Auch hier wenden wir zweimal hintereinander die Regel von de l'Hospital an (jeweils für „$\frac{0}{0}$“; die Ableitung des Nenners hat in der Nähe von 0 keine Nullstellen). Wegen $(x^x)'=(e^{x\ln x})'=x^x(x\ln x)'=x^x(1+\ln x)$ ergibt sich

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^x-x}{1-x+\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{x^x(1+\ln x)-1}{-1+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x^x(1+\ln x)^2+x^x\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\frac{1+1}{-1}=-2\,.$$

Aufgabe 4 Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung (Beachte: auf Intervallen der Form $[\sqrt{k\pi},\sqrt{(k+1)\pi}\,]$ wechselt $\sin(x^2)$ nicht das Vorzeichen) existiert eine Zahl ξ_k zwischen $\sqrt{k\pi}$ und $\sqrt{(k+1)\pi}$ mit der Eigenschaft

$$\int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}}\sin(x^2)\,dx=\int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}}\frac{x\sin(x^2)}{x}\,dx=\frac{1}{\xi_k}\int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}}x\sin(x^2)\,dx\,.$$

Wir müssen also nur noch zeigen, dass das letzte Integral den Wert $(-1)^k$ hat. Dazu substituieren wir $t=x^2$. Dies liefert $dt=2x\,dx$ und damit

$$\int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}}x\sin(x^2)\,dx=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\tfrac{1}{2}\sin(t)\,dt\,.$$

Wie wir in der Lösung zu Blatt 11, Aufgabe **6 f)** sahen, ergibt dieses Integral tatsächlich den Wert $(-1)^k$.

Aufgabe 5 **a)** Die Behauptung ist gezeigt, wenn wir beweisen, dass $\int_0^{\sqrt{\alpha\pi}}\sin(x^2)\,dx$ für $\alpha\to\infty$ konvergiert. Sei also $\alpha\geq 1$ beliebig. Mit $[\alpha]$ bezeichnen wir die größte natürliche Zahl, die noch $\leq\alpha$ ist. Es ergibt sich

$$\int_0^{\sqrt{\alpha\pi}}\sin(x^2)\,dx=\int_0^{\sqrt{\pi}}\sin(x^2)\,dx+\sum_{k=1}^{[\alpha]-1}\int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}}\sin(x^2)\,dx+\int_{\sqrt{[\alpha]\pi}}^{\sqrt{\alpha\pi}}\sin(x^2)\,dx\,.$$

Die hier auftretende Summe lässt sich gemäß **4** schreiben als

$$\sum_{k=1}^{[\alpha]-1}\frac{(-1)^k}{\xi_k},\qquad\text{mit }\xi_k\text{ zwischen }\sqrt{k\pi}\text{ und }\sqrt{(k+1)\pi}.$$

Die Summe konvergiert also für $\alpha \to \infty$ nach dem Leibnizkriterium. Es bleibt nur noch zu zeigen, dass auch das hintere Integral konvergiert. Die Abschätzung

$$\begin{aligned}\left|\int_{\sqrt{[\alpha]\pi}}^{\sqrt{\alpha\pi}} \sin(x^2)\,dx\right| \le \int_{\sqrt{[\alpha]\pi}}^{\sqrt{\alpha\pi}} |\sin(x^2)|\,dx \le \int_{\sqrt{[\alpha]\pi}}^{\sqrt{\alpha\pi}} 1\,dx &= \sqrt{\alpha\pi} - \sqrt{[\alpha]\pi} \\ &= \frac{\alpha\pi - [\alpha]\pi}{\sqrt{\alpha\pi} + \sqrt{[\alpha]\pi}} \le \frac{\pi}{\sqrt{\alpha\pi} + \sqrt{[\alpha]\pi}}\end{aligned}$$

zeigt, dass dieses Integral für $\alpha \to \infty$ gegen 0 strebt.

b) Wir substituieren $t = x^2$. Mit $dt = 2x\,dx$ erhalten wir

$$\int_0^\beta 2x\sin(x^4)\,dx = \int_0^{\beta^2} \sin(t^2)\,dt\,.$$

Gemäß **a)** konvergiert dieser Term für $\beta \to \infty$.

Aufgabe 6 Berechnen wir zunächst I_0:

$$I_0 = \int_0^\beta e^{-x}\,dx = (-e^{-x})\Big|_{x=0}^{\beta} = -e^{-\beta} + e^{-0} = 1 - e^{-\beta}\,.$$

Nun sei $n \ge 1$ beliebig. Produktintegration mit $f(x) = x^n$ und $g'(x) = e^{-x}$ liefert

$$I_n = \int_0^\beta x^n e^{-x}\,dx = x^n(-e^{-x})\Big|_{x=0}^{\beta} - \int_0^\beta nx^{n-1}(-e^{-x})\,dx = -\beta^n e^{-\beta} + nI_{n-1}\,.$$

Mit dieser Rekursionsformel berechnen wir einige weitere Integrale:

$$\begin{aligned} I_1 &= -\beta e^{-\beta} + I_0, \\ I_2 &= -\beta^2 e^{-\beta} + 2I_1 = -e^{-\beta}(\beta^2 + 2\beta) + 2I_0, \\ I_3 &= -\beta^3 e^{-\beta} + 3I_2 = -e^{-\beta}(\beta^3 + 3\beta^2 + 6\beta) + 6I_0 \end{aligned}$$

Wir vermuten, dass die allgemeine Formel

$$\begin{aligned} I_n &= -e^{-\beta}(\beta^n + n\beta^{n-1} + n(n-1)\beta^{n-2} + \cdots + n(n-1)\cdots 2\,\beta) + n!\,I_0 \\ &= -e^{-\beta}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-k)!}\beta^{n-k} + n!\,I_0 \end{aligned}$$

lautet, und zeigen dies mit vollständiger Induktion: Für $n = 0$ ist die Formel richtig; ist sie für ein $n \ge 0$ bewiesen, so folgt

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= -\beta^{n+1}e^{-\beta} + (n+1)I_n = -\beta^{n+1}e^{-\beta} + (n+1)\left(-e^{-\beta}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n!}{(n-k)!}\beta^{n-k} + n!\,I_0\right) \\ &= -e^{-\beta}\left(\beta^{n+1} + (n+1)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n!}{(n-k)!}\beta^{n-k}\right) + (n+1)!\,I_0 \\ &= -e^{-\beta}\left(\beta^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(n+1)!}{(n-(k-1))!}\beta^{n-(k-1)}\right) + (n+1)!\,I_0 \\ &= -e^{-\beta}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!}\beta^{n+1-k}\right) + (n+1)!\,I_0\,. \end{aligned}$$

Damit ist die Formel bewiesen, und wir erhalten

$$I_n = -e^{-\beta} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-k)!} \beta^{n-k} + n!\,(1 - e^{-\beta}) \xrightarrow{\beta\to\infty} n!$$

Aufgabe 2 **a)** Wir versuchen, ob wir die Regeln von de l'Hospital anwenden können. Hier konvergieren Zähler und Nenner gegen 0, die Ableitung des Nenners ist in der Nähe von 0 ungleich 0, aber

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x^2\cos(1/x))'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos(1/x) + x^2\sin(1/x)\frac{1}{x^2}}{\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos(1/x) + \sin(1/x)}{\cos x}$$

existiert nicht, denn für $x_n := ((n+\frac{1}{2})\pi)^{-1}$ hat der Bruch den Wert $(-1)^n/\cos x_n$. Die Regel von de l'Hospital ist nicht anwendbar; der ursprüngliche Grenzwert existiert aber:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos(1/x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot x\cos(1/x) = 1 \cdot 0 = 0\,.$$

b) Zu untersuchen ist hier $f(x)/g(x)$ für $f(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$ und $g(x) = x^{-1}e^{x^2}$. Wir wenden die Regel von de l'Hospital an: Der zu untersuchende Grenzwert ist vom Typ „$\frac{\infty}{\infty}$“ (Beachte: für $x \geq 0$ gilt $f(x) \geq x$ wegen $e^{x^2} \geq 1$) und wegen

$$f'(x) = e^{x^2}, \qquad g'(x) = -x^{-2}e^{x^2} + x^{-1}\cdot 2xe^{x^2} = (2 - x^{-2})e^{x^2}$$

gilt: Die Ableitung des Nenners ist für hinreichend große x stets $\neq 0$ und der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^2}}{(2-x^{-2})e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2-x^{-2}} = \frac{1}{2}$$

existiert. Folglich ist auch der zu untersuchende Grenzwert $\frac{1}{2}$.

c) Sowohl $f(x)$ als auch $g(x)$ streben für $x \to \infty$ gegen ∞. Als Ableitungen erhalten wir $f'(x) = 1 + \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x$ und

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x)e^{\sin x} + f(x)e^{\sin x}\cos x = e^{\sin x}(2\cos^2 x + x\cos x + \sin x\cos^2 x) \\ &= e^{\sin x}\cos x(2\cos x + x + \sin x\cos x)\,. \end{aligned}$$

Also wird $g'(x)$ auch für beliebig große x durch den Faktor $\cos x$ immer wieder 0. Daher ist die Regel von de l'Hospital nicht anwendbar. Der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{e^{\sin x}}$$

existiert nicht (Betrachte $x_n := (n+\frac{1}{2})\pi$), obwohl für jene x, für die $g'(x) \neq 0$ ist, gilt:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2\cos x}{e^{\sin x}(2\cos x + x + \sin x\cos x)} \xrightarrow{x\to\infty} 0$$

Aufgabe 3 **a)** $f'(x) = \big(\ln(1-x)\big)' = \frac{1}{x-1}$. Die Neumann-Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ist die Potenzreihe für $\frac{1}{1-x}$ für $|x| < 1$. Das wissen wir schon längst, denn diese Neumannreihe ist eine Geomtrische Reihe. Sie hat den Reihenwert $\frac{1}{1-x}$. Damit ist

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} -x^n.$$

Das Ergebnis erhält man auch mit dem Ansatz

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{f'(x)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (x-1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = -a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n-1} - a_n) x^n, \end{aligned}$$

der mit dem Idenditätssatz zu $a_0 = -1$ und zu $a_{n-1} - a_n = 0$, also $a_n = a_{n-1}$ führt. Damit sind alle a_n gleich, also $a_n = -1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

b) Wir dürfen in einer Potenzreihe komponentenweise integrieren, damit erhalten wir für $|x| < 1$:

$$\begin{aligned} \ln(1-x) = f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\, dt &= \ln(1) + \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} -t^n \, dt = 0 - \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n \, dt \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1} \right]_0^x = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n. \end{aligned}$$

Aufgabe 7 $f(x) = \sin(x^2)$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Damit gilt nach der Taylorformel

$$\begin{aligned} f(x) = \sin(x^2) = T_2(x) + R_3(\xi) &= \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \ + \ \frac{f^{(3)}(\xi)}{k!}(x-a)^3 \\ &= \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \ + \ \frac{f^{(3)}(\xi)}{k!}x^3 \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und für je ein ξ zwischen 0 und x, d.h. $\xi \in [0, x]$ für $x \geq 0$ und $\xi \in (-x, 0)$ für $x < 0$. In jedem Fall gilt also $|\xi| \leq |x|$. Wir brauchen nun die ersten drei Ableitungen von f:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\cos x^2, \\ f''(x) &= 2\cos x^2 + 2x(\cos x^2)' = 2\cos x^2 + 2x(-2x\sin x^2) \\ &= 2\cos x^2 - 4x^2\sin x^2, \\ f^{(3)}(x) &= 2(-2x\sin x^2) - (4x^2)'\sin x^2 - 4x^2(\sin x^2)' = -4x\sin x^2 - 8x\sin x^2 - 4x^2(2x\cos x^2) \\ &= -12x\sin x^2 - 8x^3\cos x^2. \end{aligned}$$

Damit können wir das Taylorpolynom berechnen:

$$T_2(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 0 + 0\,x + \frac{2}{2}x^2 = x^2.$$

Für den Restterm erhalten wir

$$R_3(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}x^3 = \frac{1}{6}(-12\xi\sin\xi^2 - 8\xi^3\cos\xi^2)x^3.$$

Wir können $R_3(x)$ abschätzen durch $|\sin y| \leq |y|$, $|\cos y| \leq 1$ für jedes $y \in \mathbb{R}$, und mit $|\xi| \leq |x|$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} |R_3(x)| &\leq \frac{1}{6}(12|\xi|\,|\sin\xi^2| + 8|\xi^3|\,|\cos\xi^2|)|x^3| \\ &\leq \frac{1}{6}(12|x|\,|x^2| + 8|x^3|)|x^3| \leq \frac{1}{6}(20|x^3|)|x^3| = \frac{10}{3}|x|^6. \end{aligned}$$

Damit folgt für jedes $x \in [-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$ für den Restterm $|R_3(x)| \leq \frac{1}{300\,000}$.

Noch eine Begründung für die Abschätzung $|\sin y| \leq |y|$: Wir nehmen o.b.d.A. an, dass $y > 0$ (da $\sin -y = \sin y$). Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechung gibt es ein $\xi \in (0, y)$ mit

$$|\sin y| = |\int_0^y \cos y\, dy| = |(y-0)\cos\xi| \leq |y|\,|\cos\xi| \leq |y|.$$