UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2008/09
04.11.2008

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

3. Übungsblatt

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$;

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$;

c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \Big(1+\frac{1}{k}\Big)^k = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$;

d) $6^n - 5n + 4$ ist durch 5 teilbar.

Aufgabe 2

a) Beweisen Sie die geometrische Summenformel: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

b) Folgern Sie hieraus, dass für alle $w, z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$z^n - w^n = (z-w) \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} w^k.$$

c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil von

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{i}{2}\Big)^k.$$

Aufgabe 3

Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in [0, \infty)$ gilt:

$$x \leqslant y \quad \Leftrightarrow \quad x^n \leqslant y^n.$$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, die $x \leqslant 4 + \sqrt{x-2}$ erfüllen.

Aufgabe 5

Gegeben seien die zwei komplexen Zahlen $z = 3 - i$ und $w = -1 + 2i$. Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil sowie den Betrag von

a) z^3;

b) $1/z$;

c) $z \cdot w$;

d) $\overline{z}^2 + 1/w^2$.

— bitte wenden —

Aufgabe 6

Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene:

a) $A = \{\, z \in \mathbb{C} : |z + 1 + i| = |z - 3 - 3i| \,\}$;

b) $B = \{\, z \in \mathbb{C} : |z - i| \geqslant 1 \text{ und } |z - 1 - 2i| < 3 \,\}$;

c) $C = \{\, z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^2) \leqslant 1 \,\}$.

Aufgabe 7

Bestimmen Sie jeweils alle $z \in \mathbb{C}$, die Lösungen der Gleichung sind:

a) $z^2 - 2z + 3 = 0$; **b)** $z^2 = |z|^2$.

Aufgabe 8

Es seien $w, z \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie: $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$.
Was bedeutet dies geometrisch?

Aufgabe 9 (P)

a) Es seien $x, y, z \in \mathbb{R}$ sowie $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie:

i) $2xy \leqslant \varepsilon^2 x^2 + \dfrac{1}{\varepsilon^2}\, y^2$;

ii) $(x + y)^2 \leqslant (1 + \varepsilon^2)x^2 + \Big(1 + \dfrac{1}{\varepsilon^2}\Big)y^2$;

iii) $x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz \geqslant 0$.

b) Nun seien $x, y \in (0, \infty)$. Beweisen Sie:

i) $\sqrt{x + y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y} \leqslant \dfrac{x}{\sqrt{y}} + \dfrac{y}{\sqrt{x}}$;

ii) $\big|\sqrt{x} - \sqrt{y}\big| \leqslant \sqrt{|x - y|}$.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **2, 3, 4 und 7**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.
Die mit **(P)** gekennzeichneten Aufgaben beziehen sich auf den Stoff aus den Ergänzungen zur HM I für Studierende der Physik.