UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2008/09

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Induktionsanfang (IA): Für $n = 1$ stimmt die Behauptung, denn beide Seiten der Gleichung ergeben dann 1: $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

Induktionsschluss (IS): Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ (Induktionsvoraussetzung, kurz: IV). Dann folgt

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \overset{\text{IV}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)(\tfrac{1}{2}n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}.$$

b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 \overset{\text{a)}}{=} 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2 + n - n = n^2.$$

c) IA: Für $n = 1$ ist $\prod_{k=1}^{1} (1 + \frac{1}{k})^k = (1 + \frac{1}{1})^1 = 2 = \frac{2^2}{2} = \frac{(1+1)^{1+1}}{(1+1)!}$.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte $\prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{1}{k})^k = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$ (IV). Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n+1} \Big(1 + \frac{1}{k}\Big)^k &= \left(\prod_{k=1}^{n} \Big(1 + \frac{1}{k}\Big)^k\right) \cdot \Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big)^{n+1} \overset{\text{IV}}{=} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \Big(\frac{n+1}{n+1} + \frac{1}{n+1}\Big)^{n+1} \\
&= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+2} = \frac{(n+2)^{n+2}}{(n+2)!} \\
&= \frac{((n+1)+1)^{(n+1)+1}}{((n+1)+1)!}.
\end{aligned}$$

d) IA: Für $n = 1$ stimmt die behauptete Aussage, denn $6^1 - 5 \cdot 1 + 4 = 5$ ist durch 5 teilbar.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte die Behauptung, sei also $6^n - 5n + 4$ durch 5 teilbar, etwa $6^n - 5n + 4 = 5l$ für ein $l \in \mathbb{Z}$. (IV)

Zu zeigen ist, dass dann auch $6^{n+1} - 5(n+1) + 4$ durch 5 teilbar ist. Es gilt:

$$\begin{aligned}
6^{n+1} - 5(n+1) + 4 &= 6 \cdot 6^n - 5n - 5 + 4 = 6\big(6^n - 5n + 4\big) + 25n - 25 \\
&\overset{\text{IV}}{=} 6 \cdot 5l + 25n - 25 = (\underbrace{6 \cdot l + 5n - 5}_{\in \mathbb{Z}}) \cdot 5.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

a) Wir beweisen die behauptete Identität durch vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}$.

IA: Für $n = 1$ gilt $\sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1 = \frac{1-q^1}{1-q}$ für alle $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte $\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$ für alle $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. (IV)

Für jedes $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ ergibt sich damit

$$\sum_{k=0}^{(n+1)-1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n-1} q^k + q^n \overset{\text{IV}}{=} \frac{1-q^n}{1-q} + q^n \cdot \frac{1-q}{1-q} = \frac{1-q^n+q^n-q^n\cdot q}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Sind $w \neq z$ und $z \neq 0$, so setzen wir $q := \frac{w}{z}$. Dann ist $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ und laut a) gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\frac{w}{z}\Big)^k = \frac{1-(\frac{w}{z})^n}{1-\frac{w}{z}} \quad &\Leftrightarrow \quad \Big(1-\frac{w}{z}\Big)\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\frac{w}{z}\Big)^k = 1-\Big(\frac{w}{z}\Big)^n \\ &\overset{|\cdot z^n (\neq 0!)}{\Leftrightarrow} \quad z\Big(1-\frac{w}{z}\Big)\, z^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} z^{-k}w^k = z^n - w^n \\ &\Leftrightarrow \quad (z-w)\sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k}w^k = z^n - w^n.\end{aligned}$$

Im Fall $w = z$ lautet die behauptete Gleichung $0 = 0$, diese ist offensichtlich wahr.
Wegen

$$\sum_{k=0}^{n-1} 0^{n-1-k}w^k = \sum_{k=0}^{n-2} \underbrace{0^{n-1-k}}_{=0,\text{ da } n-1-k\geqslant 1} w^k + 0^{n-1-(n-1)}w^{n-1} = 0^0 w^{n-1} = w^{n-1}$$

ist die Gleichung im Fall $z = 0$

$$(0-w)\sum_{k=0}^{n-1} 0^{n-1-k}w^k = -w\cdot w^{n-1} = -w^n = 0 - w^n$$

ebenfalls für jedes $w \in \mathbb{C}$ erfüllt.

c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ folgt mit der geometrischen Summenformel

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{i}{2}\Big)^k &\overset{l:=k-1}{=} \sum_{l=0}^{n-1}\Big(\frac{i}{2}\Big)^{l+1} = \frac{i}{2}\sum_{l=0}^{n-1}\Big(\frac{i}{2}\Big)^{l} \overset{\text{a)}}{=} \frac{i}{2}\cdot\frac{1-(i/2)^n}{1-i/2}\cdot\frac{1+i/2}{1+i/2} \\ &= \frac{i}{2}\cdot\frac{1-(i/2)^n+i/2-(i/2)^{n+1}}{1-i^2/4} = \frac{i}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\Big(1-(i/2)^n+i/2-(i/2)^{n+1}\Big) \\ &= \frac{2}{5}\,i\Big(1+i/2\Big)+\frac{2}{5}\,i\Big(-(i/2)^n-(i/2)^{n+1}\Big) = \frac{2}{5}\,i-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\,i\Big(-1-i/2\Big)(i/2)^n \\ &= \frac{2}{5}\,i-\frac{1}{5}+\Big(-\frac{2}{5}\,i+\frac{1}{5}\Big)\frac{i^n}{2^n}.\end{aligned}$$

Nun seien $m \in \mathbb{N}_0$ und $r \in \{0,1,2,3\}$ mit $n = 4m + r$. Dann gilt

$$i^n = i^{4m+r} = i^{4m}\cdot i^r = (i^4)^m\cdot i^r = 1^m\cdot i^r = i^r$$

und damit

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{i}{2}\Big)^k = \frac{2}{5}\,i-\frac{1}{5}+\Big(-\frac{2}{5}\,i+\frac{1}{5}\Big)\frac{i^r}{2^n}.$$

Für $r = 0$ (also, falls n durch 4 teilbar ist) gilt

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{i}{2}\Big)^k = \frac{2}{5}\,i-\frac{1}{5}+\Big(-\frac{2}{5}\,i+\frac{1}{5}\Big)\frac{1}{2^n} = -\frac{1}{5}+\frac{1}{5\cdot 2^n}+i\Big(\frac{2}{5}-\frac{1}{5\cdot 2^{n-1}}\Big).$$

Für $r = 1$ (also, falls n durch 4 mit Rest 1 teilbar ist) gilt

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{i}{2}\Big)^k = \frac{2}{5}\,i-\frac{1}{5}+\Big(-\frac{2}{5}\,i+\frac{1}{5}\Big)\frac{i}{2^n} = -\frac{1}{5}+\frac{1}{5\cdot 2^{n-1}}+i\Big(\frac{2}{5}+\frac{1}{5\cdot 2^n}\Big).$$

Für $r = 2$ (also, falls n durch 4 mit Rest 2 teilbar ist) gilt

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{i}{2}\Big)^k = \frac{2}{5}\,i - \frac{1}{5} + \Big(-\frac{2}{5}\,i + \frac{1}{5}\Big)\frac{-1}{2^n} = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5\cdot 2^n} + i\,\Big(\frac{2}{5} + \frac{1}{5\cdot 2^{n-1}}\Big).$$

Für $r = 3$ (also, falls n durch 4 mit Rest 3 teilbar ist) gilt

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{i}{2}\Big)^k = \frac{2}{5}\,i - \frac{1}{5} + \Big(-\frac{2}{5}\,i + \frac{1}{5}\Big)\frac{-i}{2^n} = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5\cdot 2^{n-1}} + i\,\Big(\frac{2}{5} - \frac{1}{5\cdot 2^n}\Big).$$

Wir lesen ab:

$$\mathrm{Re}\Big(\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{i}{2}\Big)^k\Big) = \begin{cases} -\frac{1}{5} + \frac{1}{5\cdot 2^n}\ , & \text{falls } n \text{ durch 4 teilbar ist} \\ -\frac{1}{5} + \frac{1}{5\cdot 2^{n-1}}, & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 1 teilbar ist} \\ -\frac{1}{5} - \frac{1}{5\cdot 2^n}\ , & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 2 teilbar ist} \\ -\frac{1}{5} - \frac{1}{5\cdot 2^{n-1}}, & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 3 teilbar ist} \end{cases}$$

$$\mathrm{Im}\Big(\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{i}{2}\Big)^k\Big) = \begin{cases} \frac{2}{5} - \frac{1}{5\cdot 2^{n-1}}, & \text{falls } n \text{ durch 4 teilbar ist} \\ \frac{2}{5} + \frac{1}{5\cdot 2^n}\ , & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 1 teilbar ist} \\ \frac{2}{5} + \frac{1}{5\cdot 2^{n-1}}, & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 2 teilbar ist} \\ \frac{2}{5} - \frac{1}{5\cdot 2^n}\ , & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 3 teilbar ist} \end{cases}$$

Aufgabe 3

Es seien $n \in \mathbb{N}$ sowie $x, y \in [0, \infty)$. Für $x = 0$ ist die behauptete Aussage klar. Für $x > 0$ ergibt sich

$$x \leqslant y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \leqslant 0 \quad \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \quad (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k \leqslant 0 \quad \overset{2\,\mathrm{b})}{\Leftrightarrow} \quad x^n - y^n \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^n \leqslant y^n.$$

Zur Äquivalenz in $(*)$: Wegen $x > 0$ und $y \geqslant 0$ ist $\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k \geqslant x^{n-1} > 0$.

Aufgabe 4

Wir bemerken zunächst, dass die Ungleichung $x \leqslant 4 + \sqrt{x-2}$ nur für $x \geqslant 2$ sinnvoll ist. Es gilt

$$x \leqslant 4 + \sqrt{x-2} \quad \Leftrightarrow \quad x - 4 \leqslant \sqrt{x-2}.$$

Im Fall $x \geqslant 4$ ist dies nach Aufgabe 3 äquivalent zu (man beachte $x - 4 \geqslant 0$)

$$\begin{aligned} (x-4)^2 \leqslant x - 2 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - 8x + 16 \leqslant x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 9x + 18 \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-3)(x-6) \leqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \big(x - 3 \leqslant 0 \text{ und } x - 6 \geqslant 0\big) \text{ oder } \big(x - 3 \geqslant 0 \text{ und } x - 6 \leqslant 0\big) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in [3, 6]. \end{aligned}$$

Da wir nur $x \geqslant 4$ betrachtet haben, gilt $x \leqslant 4 + \sqrt{x-2}$ in diesem Fall genau für $x \in [4, 6]$.
Für jedes $x \in [2, 4)$ gilt $x - 4 < 0$ und, da die Wurzel nach Definition nichtnegativ ist, genügt jedes $x \in [2, 4)$ der Ungleichung $x - 4 < 0 \leqslant \sqrt{x-2}$ und somit auch $x \leqslant 4 + \sqrt{x-2}$.
Insgesamt haben wir

$$x \leqslant 4 + \sqrt{x-2} \quad \Leftrightarrow \quad x \in [2, 6].$$

Aufgabe 5

a) Es gilt: $z^3 = (3-i)^3 = (3-i)(9-6i+i^2) = (3-i)(8-6i) = 24-18i-8i+6i^2 = 18-26i$. Folglich hat z^3 den Realteil 18 und den Imaginärteil -26. Ferner ist $|z^3| = \sqrt{18^2+(-26)^2} = \sqrt{1000} = 10\sqrt{10}$. Alternativ kann man $|z^3|$ auch berechnen, ohne z^3 bestimmt zu haben: $|z^3| = |z|^3 = \sqrt{3^2+(-1)^2}^3 = \sqrt{10}^3 = 10\sqrt{10}$.

b) Wir erweitern den Bruch geeignet (Standardtrick: $z\bar{z}$ ist reell, daher ergibt $1/z = 1/z \cdot \bar{z}/\bar{z} = \bar{z}/(z\bar{z})$ einen reellen Nenner):

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{3-i} = \frac{1}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i} = \frac{3+i}{3^2-i^2} = \frac{3+i}{10} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}i.$$

Also hat $1/z$ den Realteil $\frac{3}{10}$ und den Imaginärteil $\frac{1}{10}$. Der Betrag von $1/z$ ist $|1/z| = \sqrt{\frac{9}{100}+\frac{1}{100}} = \sqrt{1/10} = \sqrt{10}/10$, alternativ: $|1/z| = 1/|z| = 1/\sqrt{10} = \sqrt{10}/10$.

c) Es ergibt sich $z \cdot w = (3-i)(-1+2i) = -3+6i+i-2i^2 = -1+7i$. Also hat $z \cdot w$ Realteil -1 und Imaginärteil 7. Außerdem gilt $|z \cdot w| = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} = |z| \cdot |w|$.

d) Es ist $\bar{z}^2 = \left(\overline{3-i}\right)^2 = (3+i)^2 = 9+6i+i^2 = 8+6i$ und wegen $w^2 = (-1+2i)^2 = 1-4i+4i^2 = -3-4i$ ergibt sich

$$\frac{1}{w^2} = \frac{1}{-3-4i} \cdot \frac{-3+4i}{-3+4i} = \frac{-3+4i}{9-16i^2} = \frac{-3+4i}{25} = -\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i.$$

$\bar{z}^2+1/w^2 = (8+6i)+(-\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i)$ hat somit Realteil $8-\frac{3}{25} = \frac{197}{25}$ und Imaginärteil $6+\frac{4}{25} = \frac{154}{25}$. Der Betrag von $\bar{z}^2+1/w^2$ lautet $|\bar{z}^2+1/w^2| = \sqrt{197^2+154^2}/25 = \sqrt{2501}/5$.

Aufgabe 6

a) Hier handelt es sich um die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, die vom Punkt $-1-i$ den gleichen Abstand haben wie vom Punkt $3+3i$. Das ist die Mittelsenkrechte der Verbindungsstrecke dieser beiden Punkte, also die Gerade $\operatorname{Im} z = -\operatorname{Re} z + 2$.

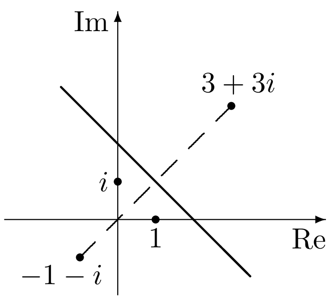
b) Dies ist der Schnitt zwischen dem Äußeren des Kreises um i mit Radius 1 (einschließlich der Kreislinie) und dem Inneren des Kreises um $1+2i$ mit Radius 3 (ohne Rand). Die Menge ist in der Skizze schraffiert.

c) Die komplexe Zahl $z = x+iy$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$) liegt genau dann in dieser Menge, wenn

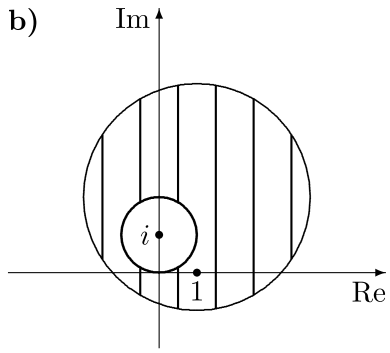
$$1 \geqslant \operatorname{Re}(z^2) = \operatorname{Re}\big((x+iy)^2\big) = \operatorname{Re}(x^2+2ixy-y^2) = x^2-y^2$$

gilt, d. h. für $x^2 \leqslant 1+y^2$, also $|x| \leqslant \sqrt{1+y^2}$ bzw. $-\sqrt{1+y^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{1+y^2}$. Die Menge ist in der Skizze schraffiert; man beachte, dass es sich um eine unbeschränkte Menge handelt.

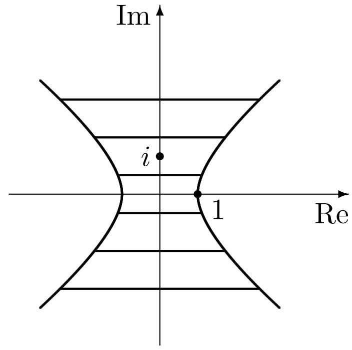
a)



b)



c)



Aufgabe 7

a) Es gilt $z^2 - 2z + 3 = (z-1)^2 + 2$. Die Gleichung $z^2 - 2z + 3 = 0$ ist also genau dann erfüllt, wenn $(z-1)^2 = -2$. Dies bedeutet $z - 1 = i\sqrt{2}$ oder $z - 1 = -i\sqrt{2}$, also hat die Gleichung die zwei Lösungen $z_1 = 1 + i\sqrt{2}$ und $z_2 = 1 - i\sqrt{2}$.

b) Mit dem Ansatz $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
z^2 = |z|^2 \quad &\Leftrightarrow \quad a^2 + 2aib + (ib)^2 = a^2 + b^2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + 2aib - b^2 = a^2 + b^2 \\
&\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \quad a^2 - b^2 = a^2 + b^2 \text{ und } 2ab = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad -2b^2 = 0 \text{ und } \big(a = 0 \text{ oder } b = 0\big) \\
&\Leftrightarrow \quad b = 0 \text{ und } \big(a = 0 \text{ oder } b = 0\big) \\
&\Leftrightarrow \quad b = 0.
\end{aligned}$$

[In $(*)$ verwenden wir, dass zwei komplexe Zahlen genau dann gleich sind, wenn sie den selben Real- und Imaginärteil besitzen.]
Also ist $z^2 = |z|^2$ genau dann erfüllt, wenn $\operatorname{Im}(z) = 0$ bzw. $z \in \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 8

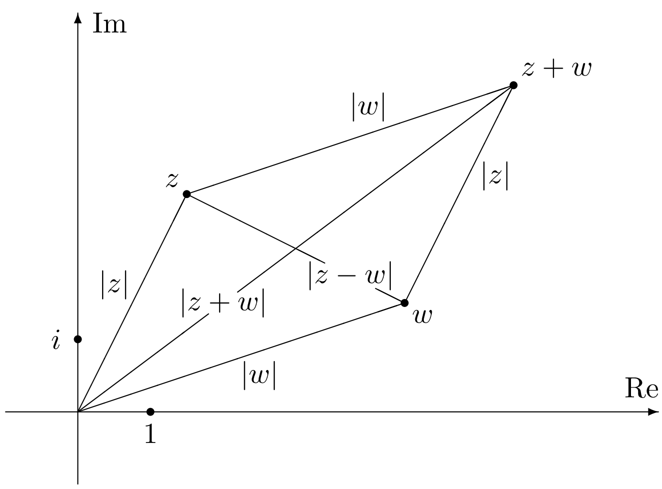
Mit Hilfe von $\operatorname{Re}(\lambda) = \frac{1}{2}(\lambda + \overline{\lambda})$ (für $\lambda \in \mathbb{C}$) erhalten wir

$$|z+w|^2 = (z+w)\overline{(z+w)} = (z+w)(\overline{z} + \overline{w}) = z\overline{z} + z\overline{w} + \underbrace{w\overline{z}}_{=\overline{\overline{w}z} = \overline{z\overline{w}}} + w\overline{w} = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + |w|^2.$$

Daraus ergibt sich sofort

$$|z-w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}\big(z(\overline{-w})\big) + |-w|^2 = |z|^2 - 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + |w|^2.$$

Addiert man diese Gleichungen, so folgt $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$.
Geometrische Bedeutung: In einem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate der Diagonalenlängen gleich der Summe der Quadrate der Seitenlängen.



Aufgabe 9 (P)

a) Gegeben seien $x, y, z \in \mathbb{R}$ sowie $\varepsilon > 0$.

i) Es gilt:

$$0 \leqslant (\varepsilon x - y/\varepsilon)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant \varepsilon^2 x^2 - 2\varepsilon xy/\varepsilon + y^2/\varepsilon^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2xy \leqslant \varepsilon^2 x^2 + y^2/\varepsilon^2.$$

ii) Unter Verwendung von i) erhalten wir

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \overset{\text{i)}}{\leqslant} x^2 + \varepsilon^2 x^2 + y^2/\varepsilon^2 + y^2 = (1+\varepsilon^2)x^2 + \Big(1 + \frac{1}{\varepsilon^2}\Big)y^2.$$

iii) Es ist

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz \geqslant 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\big(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz\big) \geqslant 0 \\ \Leftrightarrow \quad &\frac{1}{2}\big(x^2 + 2xy + y^2 + x^2 + 2xz + z^2 + y^2 + 2yz + z^2\big) \geqslant 0 \\ \Leftrightarrow \quad &\frac{1}{2}\big((x+y)^2 + (x+z)^2 + (y+z)^2\big) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Hiermit ist die behauptete Ungleichung bewiesen, weil die Aussage der letzten Zeile offenbar wahr ist und nur Äquivalenzumformungen getätigt wurden.

b) Nun seien $x, y \in (0, \infty)$.

i) Es gilt:

$$\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad \overset{\text{Aufgabe 3}}{\Leftrightarrow} \quad x + y \leqslant x + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant 2\sqrt{x}\sqrt{y}.$$

Die letzte Ungleichung ist offenkundig wahr.
Nun zur zweiten Ungleichung:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} + \sqrt{y} \leqslant \frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} \quad \overset{|\cdot\sqrt{x}\sqrt{y}>0}{\Leftrightarrow} \quad &x\sqrt{y} + \sqrt{x}\,y \leqslant x\sqrt{x} + y\sqrt{y} \\ \Leftrightarrow \quad &0 \leqslant x\sqrt{x} - x\sqrt{y} + y\sqrt{y} - y\sqrt{x} \\ \Leftrightarrow \quad &0 \leqslant (x-y)\big(\sqrt{x} - \sqrt{y}\big). \end{aligned}$$

Die letzte Aussage ist wahr, denn:
1. Fall: $x = y$. $0 \leqslant 0$ $\checkmark$
2. Fall: $x < y$. Wegen $x < y \Leftrightarrow \sqrt{x} < \sqrt{y}$ ist $0 \leqslant (x-y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})$ wahr.
3. Fall: $x > y$. Wegen $x > y \Leftrightarrow \sqrt{x} > \sqrt{y}$ folgt auch hier $0 \leqslant (x-y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})$.

ii) Es gilt

$$\big|\sqrt{x} - \sqrt{y}\big| \leqslant \sqrt{|x-y|} \quad \overset{\text{Aufgabe 3}}{\Leftrightarrow} \quad \big(\sqrt{x} - \sqrt{y}\big)^2 \leqslant \big(\sqrt{|x-y|}\big)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \leqslant |x-y|.$$

Im Fall $x \leqslant y$ ist dies äquivalent zu

$$x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \leqslant y - x \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x}\big(\sqrt{x} - \sqrt{y}\big) \leqslant 0.$$

Letzteres ist wahr wegen $x \leqslant y \Rightarrow \sqrt{x} \leqslant \sqrt{y}$.
Für $x \geqslant y$ (dies könnte man auch direkt aus obigem Fall folgern, weil der Ausdruck $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x-y|}$ symmetrisch bzgl. Tausch $x \leftrightsquigarrow y$ ist) ergibt sich:

$$x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \leqslant x - y \quad \Leftrightarrow \quad 2y - 2\sqrt{x}\sqrt{y} \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{y}\big(\sqrt{y} - \sqrt{x}\big) \leqslant 0.$$

Letzteres ist wahr wegen $x \geqslant y \Rightarrow \sqrt{x} \geqslant \sqrt{y}$.