UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2008/09

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Etwa folgende Folgen erfüllen das Verlangte:

i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

ii) $(b_n) = (1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, \dots)$

iii) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = (-1)^n n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

iv) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n = 2008 + \frac{(-1)^n}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

v) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $e_n = 0$ für gerade n und $e_n = n$ für ungerade n.

b) **i)** In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \to 0$ für $n \to \infty$ gilt. Die Folge $(a_n) = (\sqrt{n})$ erfüllt also die Voraussetzung. Allerdings ist (a_n) divergent.
Die harmonische Reihe wäre ein weiteres Gegenbeispiel.

ii) Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt $\varepsilon = 2\delta^2$ für $\delta := \sqrt{\varepsilon/2} > 0$. Nach Voraussetzung existiert ein n_0 so, dass für $n \geqslant n_0$ stets $|a_n| < 2\delta^2 = \varepsilon$ ist. Die Folge konvergiert also gegen Null.

iii) Etwa $(a_n) = ((-1)^n)$ erfüllt $|a_n + a_{n+1}| = 0 < \varepsilon$ sogar für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge (a_n) ist jedoch divergent.

iv) Die Folge (a_n) mit $a_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$ erfüllt sicher $|a_n \cdot a_{n+1}| = 0 < \varepsilon$, ist aber divergent.

v) In diesem Fall ist (a_n) konvergent mit Grenzwert Null. Wäre (a_n) keine Nullfolge, so gäbe es zu vorgegebenem ε eine Teilfolge $(a_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, für welche stets $|a_{k(n)}| \geqslant \sqrt{\varepsilon}$ wäre. Dann wäre aber stets $|a_{k(n)}^2| \geqslant \sqrt{\varepsilon}^2 = \varepsilon$ im Widerspruch zur Voraussetzung!

Aufgabe 2

a) Offenbar gilt

$$a_{2n} = \big(1 + (-1)^{2n}\big)^{2n} = (1+1)^{2n} = 2^{2n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Also ist (a_n) nicht nach oben beschränkt, daher ergibt sich $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n) = \infty$. Weiter gilt

$$a_{2n+1} = \big(1 + (-1)^{2n+1}\big)^{2n+1} = (1-1)^{2n+1} = 0 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Damit ist 0 ein Häufungswert der Folge. Weitere Häufungswerte gibt es nicht, denn zu jedem anderen Punkt kann man eine so kleine Umgebung wählen, dass nur endlich viele Folgenglieder a_n in ihr liegen. Somit ist $\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n) = 0$.

b) Wegen $1 + 1/2^n \to 1$ und $2 + (n+1)/n = 2 + 1 + 1/n \to 3$ für $n \to \infty$ ergeben sich hier die drei Häufungswerte 1, 2 und 3. Damit gilt $\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n) = 1$ und $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n) = 3$.

Aufgabe 3

a) Wegen $a_n = \frac{2n}{n+1} = \frac{2}{1+\frac{1}{n}}$ konvergiert (a_n) für $n \to \infty$ gegen 2.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$|a_n - 2| = \left|\frac{2n - 2(n+1)}{n+1}\right| = \frac{2}{n+1}.$$

Daher ergibt sich

$$|a_n - 2| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{n+1} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{2}{\varepsilon} - 1.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{2}{\varepsilon} - 1$. Wie eben gesehen, gilt dann $|a_n - 2| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant n_0$. Also konvergiert (a_n) gegen 2.

Ist $\varepsilon = 10^{-10}$, so kann man beispielsweise $n_0 = 2 \cdot 10^{10} > 2 \cdot 10^{10} - 1$ nehmen. Damit gilt $|a_n - 2| < 10^{-10}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2 \cdot 10^{10}$.

b) Die Folge (a_n) ist eine Nullfolge: Es gilt $|a_n| \leqslant 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $\varepsilon \in (0,1)$ ist

$$|a_n| = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{n+1}+1}} < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{\sqrt{n+1}+1} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \sqrt{n+1} > \frac{1}{\varepsilon^2} - 1 \Leftrightarrow n > \left(\frac{1}{\varepsilon^2} - 1\right)^2 - 1.$$

Hieraus folgt: Wählt man zu einem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > (\frac{1}{\varepsilon^2} - 1)^2 - 1$, dann gilt $|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant n_0$, d.h. (a_n) konvergiert gegen 0.

Etwa für $n_0 = 10^{40}$ ist $|a_n - 0| < 10^{-10}$ für alle $n \geqslant 10^{40}$ erfüllt.

Aufgabe 4

a) Diese Folge ist konvergent, denn es gilt

$$\frac{n^2 + 3n - 4}{1 + n^2 + 4n^3} = \frac{1/n + 3/n^2 - 4/n^3}{1/n^3 + 1/n + 4} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{0+0-0}{0+0+4} = 0.$$

b) Wegen $a_{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \to 1$ $(n \to \infty)$ und $a_{2n+1} = -1 + \frac{1}{2n+1} \to -1$ $(n \to \infty)$ besitzt die Folge (a_n) die zwei Häufungswerte 1 und -1. Daher ist (a_n) divergent.

c) Wegen $(u-v)(u+v) = u^2 - v^2$, also $u - v = (u^2 - v^2)/(u+v)$ für $u + v \neq 0$, ergibt sich

$$\begin{aligned} a_n = \sqrt{9n^2 + 2n + 1} - 3n &= \frac{9n^2 + 2n + 1 - 9n^2}{\sqrt{9n^2 + 2n + 1} + 3n} = \frac{2n+1}{\sqrt{9n^2 + 2n + 1} + 3n} \\ &= \frac{2 + 1/n}{\sqrt{9 + 2/n + 1/n^2} + 3} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{9} + 3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

d) Der binomische Satz 4.11 (2) liefert für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$(1+n)^{42} = \sum_{k=0}^{42} \binom{42}{k} n^k = \alpha_0 + \alpha_1 n + \ldots + \alpha_{42} n^{42}, \quad \text{wobei} \quad \alpha_k := \binom{42}{k}.$$

Wegen $\alpha_{42} = \binom{42}{42} = 1$ ergibt sich $(1+n)^{42} - n^{42} = \alpha_0 + \alpha_1 n + \ldots + \alpha_{41} n^{41}$. Folglich ist

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\alpha_0 + \alpha_1 n + \ldots + \alpha_{40} n^{40} + \alpha_{41} n^{41}}{n^{41}} \\ &= \frac{\alpha_0}{n^{41}} + \frac{\alpha_1}{n^{40}} + \ldots + \frac{\alpha_{40}}{n} + \alpha_{41} \xrightarrow{n\to\infty} \alpha_{41} = \binom{42}{41} = \binom{42}{1} = 42. \end{aligned}$$

e) Wir verwenden die geometrische Summenformel 4.11 (1)

$$u^m - v^m = (u-v)\sum_{k=0}^{m-1} u^{m-1-k}v^k = (u-v)(u^{m-1} + u^{m-2}v + \ldots + uv^{m-2} + v^{m-1}) \qquad (*)$$

für $m = 10$. Setzen wir $b_n := \sqrt[10]{1 + 3n^{-4} + n^{-9}}$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = n^4(b_n - 1) \overset{(*)}{=} n^4 \cdot \frac{b_n^{10} - 1^{10}}{b_n^9 + b_n^8 + \ldots + b_n + 1} = \frac{n^4(3n^{-4} + n^{-9})}{b_n^9 + b_n^8 + \ldots + b_n + 1} = \frac{3 + n^{-5}}{b_n^9 + b_n^8 + \ldots + b_n + 1}.$$

Wegen $b_n \to 1$ folgt $a_n \to \frac{3}{10}$ $(n \to \infty)$.

f) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$3 = \sqrt[n]{3^n} \leqslant a_n \leqslant \sqrt[n]{3^n + 3^n} = \sqrt[n]{2 \cdot 3^n} = 3 \cdot \sqrt[n]{2}.$$

Wegen $\sqrt[n]{2} \to 1$ $(n \to \infty)$ folgt mit 6.3 (4): $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$.

Aufgabe 5

a) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dann ist (a_n) beschränkt und (b_n) konvergent. Jedoch konvergiert die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n \cdot b_n = (-1)^n$ nicht.

b) Nun seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Behauptet wird, dass die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n \cdot b_n$ gegen 0 konvergiert.

Da (a_n) beschränkt ist, existiert eine Konstante $K > 0$ so, dass $|a_n| \leqslant K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Deshalb ergibt sich für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$|c_n| = |a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leqslant K|b_n|.$$

Wegen $b_n \to 0$ konvergiert nach 6.3 (2) $|b_n| \to 0$ und nach 6.3 (5) auch $K|b_n| \to 0$ für $n \to \infty$. Mit 6.3 (1) folgt $c_n \to 0$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 6

a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n =: a$ und $(a_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von (a_n). Wir zeigen, dass $(a_{k(n)})$ konvergiert und $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k(n)} = a$ gilt.

Sei $\varepsilon > 0$.
Wegen $a_n \to a$ für $n \to \infty$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geqslant n_0$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$. Wegen $k(n) < k(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $k(N) \geqslant n_0$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant N$ ist dann $k(n) \geqslant k(N) \geqslant n_0$. Demzufolge gilt $|a_{k(n)} - a| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant N$, d.h. $(a_{k(n)})$ konvergiert gegen a.

b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitze eine divergente Teilfolge $(a_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Zu zeigen ist, dass dann auch (a_n) divergent ist.

Wir führen einen Beweis durch Widerspruch. Annahme: (a_n) konvergiert.
Dann konvergiert laut a) jede Teilfolge von (a_n). Dies ist jedoch nicht möglich, weil vorausgesetzt wurde, dass (a_n) eine divergente Teilfolge besitzt. Also ist die Annahme falsch, d.h. die Folge (a_n) divergiert.

c) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Im allgemeinen folgt aus der Konvergenz von (a_{2n}) und (a_{2n+1}) nicht die Konveregnz von (a_n).

Ist etwa die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $a_n = (-1)^n$. Dann konvergieren die beiden Teilfolgen (a_{2n}) und (a_{2n+1}) für $n \to \infty$. Jedoch ist (a_n) divergent.

d) Sei (a_n) eine Folge. Behauptung:

$$(a_n) \text{ konvergiert} \quad \iff \quad (a_{2n}),\ (a_{2n+1}) \text{ und } (a_{3n}) \text{ konvergieren.}$$

"$\Rightarrow$": Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere. Gemäß a) konvergiert dann auch jede Teilfolge von (a_n). Insbesondere sind die drei Teilfolgen (a_{2n}), (a_{2n+1}) und (a_{3n}) konvergent.

"$\Leftarrow$": Nun ist die Konvergenz der drei Teilfolgen $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ vorausgesetzt. Zu zeigen: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Wir setzen $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} =: a$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} =: b$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{3n} =: c$ und wollen zuerst $a = b = c$ zeigen.

Da (a_{6n}) Teilfolge von (a_{2n}) ist und (a_{2n}) konvergiert, konvergiert (a_{6n}) gegen $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = a$.
Da (a_{6n}) Teilfolge von (a_{3n}) ist und (a_{3n}) konvergiert, konvergiert (a_{6n}) gegen $\lim\limits_{n\to\infty} a_{3n} = c$.

Hieraus folgt aufgrund der Eindeutigkeit des Grenzwerts $a = c$.

Durch Betrachtung von (a_{6n+3}) ergibt sich analog $b = c$.

Wir wollen nun zeigen, dass (a_n) gegen a konvergiert. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Wegen $a_{2n} \to a$ für $n \to \infty$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_{2n} - a| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geqslant n_0,$$

woraus

$$|a_m - a| < \varepsilon \qquad \text{für alle geraden } m \geqslant 2n_0$$

folgt. Wegen $a_{2n+1} \to b = a$ gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_{2n+1} - a| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geqslant n_1,$$

woraus

$$|a_m - a| < \varepsilon \qquad \text{für alle ungeraden } m \geqslant 2n_1 + 1$$

folgt. Demnach gilt für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geqslant \max\{2n_0, 2n_1 + 1\}$

$$|a_m - a| < \varepsilon,$$

d.h. (a_n) konvergiert und zwar gegen a.

Aufgabe 7

Die Folge (a_n) sei durch die Rekursionsvorschrift

$$a_1 = \sqrt{2}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

gegeben. (Offenbar sind alle $a_n \geqslant 0$; also kann man die Wurzel ziehen.)
1. Beh.: Die Folge (a_n) ist monoton wachsend, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$ gilt $a_n \geqslant a_{n-1}$.
Induktionsanfang: Für $n = 2$ gilt $a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \geqslant \sqrt{2} = a_1$.
Induktionsschluss: Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$. Für dieses n gelte $a_n \geqslant a_{n-1}$ (IV). Dann folgt

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \overset{\text{IV}}{\geqslant} \sqrt{2 + a_{n-1}} = a_n.$$

2. Beh.: Die Folge (a_n) ist nach oben durch 2 beschränkt, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \leqslant 2$.
Induktionsanfang: Es gilt $a_1 = \sqrt{2} \leqslant 2$.
Induktionsschluss: Sei $n \in \mathbb{N}$. Für dieses n gelte $a_n \leqslant 2$ (IV). Dann folgt

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \overset{\text{IV}}{\leqslant} \sqrt{2 + 2} = 2.$$

Da (a_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt ist, konvergiert (a_n) gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$. Da die Folge (a_{n+1}) eine Teilfolge von (a_n) ist, gilt nach Teil a): $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a$. Durch den Grenzübergang $n \to \infty$ in der Rekursionsformel ergibt sich für a die Gleichung

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2 + a_n} = \sqrt{2 + \lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{2 + a}.$$

Quadrieren liefert $a^2 = 2 + a$ bzw. $0 = a^2 - a - 2 = (a - 2)(a + 1)$, also $a = 2$ oder $a = -1$. Wegen $a_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $a \geqslant 0$ (vgl. 6.3 (3)). Daher ist $a = 2$ der Grenzwert von (a_n).

Aufgabe 8 (P)

Sei $b_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Zu zeigen ist

$$\lim_{n\to\infty} b_n = e,$$

wobei die Eulersche Zahl e durch $e := \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ definiert ist.
1. Schritt: $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.
Um dies nachzuweisen, verwenden wir das Monotonie-Kriterium (vgl. Satz in 6.4):
(b_n) ist monoton wachsend, denn für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} > \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = b_n.$$

Außerdem ist (b_n) beschränkt, denn für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} b_n \quad &= \quad 1 + \underbrace{1}_{=\frac{1}{2^0}} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{=\frac{1}{2^1}} + \underbrace{\frac{1}{2\cdot 3}}_{<\frac{1}{2^2}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}}_{<\frac{1}{2^{n-1}}} \leqslant 1 + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &\overset{4.11(1)}{=} \quad 1 + \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} \leqslant 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3. \end{aligned}$$

Das Monotonie-Kriterium liefert, dass (b_n) konvergiert.

2. Schritt: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \geqslant e$.
Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$. Für $k \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant k \geqslant 0$ gilt

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\cdot\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\cdot\underbrace{\frac{n}{n}}_{=1}\cdot\underbrace{\frac{n-1}{n}}_{<1}\cdot\ldots\cdot\underbrace{\frac{n-k+1}{n}}_{<1} < \frac{1}{k!}.$$

Damit ergibt sich aus der binomischen Formel

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} < \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = b_n,$$

woraus $e = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ mit 6.3 (3) folgt.

3. Schritt: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \leqslant e$.
Es sei $j \in \mathbb{N}$ mit $j \geqslant 2$ fest. Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant j$ gilt

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \geqslant \sum_{k=0}^{j}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} =: c_n^{(j)}.$$

Nach 6.3 (3) erhalten wir für $n \to \infty$

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geqslant \lim_{n\to\infty} c_n^{(j)}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} c_n^{(j)} &= \sum_{k=0}^{j}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{j}\frac{1}{k!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{n} \\ &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^{j}\frac{1}{k!}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{k=0}^{j}\frac{1}{k!} = b_j \end{aligned}$$

folgt mit 6.3 (3) für $j \to \infty$

$$e \geqslant \lim_{j\to\infty} b_j.$$

Aufgabe 9 (P)

a) Es sei (a_n) eine Cauchy-Folge, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n, m \geqslant n_0 : \quad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Beh.: (a_n) ist beschränkt, d.h. es gibt eine Konstante $K > 0$ mit $|a_n| \leqslant K$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Da (a_n) eine Cauchy-Folge ist, existiert insbesondere zu $\varepsilon = 1$ ein $n_0 = n_0(1)$ mit

$$\forall n, m \geqslant n_0 : \quad |a_n - a_m| < 1.$$

Folglich gilt

$$\forall n \geqslant n_0 : \quad |a_n - a_{n_0}| < 1$$

und für alle $n \geqslant n_0$ erhalten wir

$$|a_n| = |a_n - a_{n_0} + a_{n_0}| \leqslant |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0}| \leqslant 1 + |a_{n_0}|.$$

Für $1 \leqslant n < n_0$ gilt offensichtlich

$$|a_n| \leqslant \max\big\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0-1}|\big\}.$$

Insgesamt ergibt sich für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n| \leqslant \max\big\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a_{n_0}|\big\} =: K.$$

b) Gegeben seien $0 \leqslant q < 1$ und eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $|a_n - a_{n+1}| \leqslant q^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Beh.: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge.

Wir zeigen zunächst: $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall k \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geqslant n_0 : \quad |a_{n+k} - a_n| < \varepsilon.$

Für beliebige $k, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
a_{n+k} - a_n \quad &= \quad a_{n+k} + \left(\sum_{j=0}^{k-2} a_{n+j+1}\right) - \left(\sum_{l=0}^{k-2} a_{n+l+1}\right) - a_n \\
&\overset{j:=l+1}{=} \quad a_{n+k} + \left(\sum_{j=0}^{k-2} a_{n+j+1}\right) - \left(\sum_{j=1}^{k-1} a_{n+j}\right) - a_n \\
&= \quad \left(\sum_{j=0}^{k-1} a_{n+j+1}\right) - \left(\sum_{j=0}^{k-1} a_{n+j}\right) = \sum_{j=0}^{k-1} (a_{n+j+1} - a_{n+j}).
\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich unter Verwendung der Dreiecksungleichung und der geometrischen Summenformel

$$\begin{aligned}
|a_{n+k} - a_n| &\leqslant \sum_{j=0}^{k-1} |a_{n+j+1} - a_{n+j}| \leqslant \sum_{j=0}^{k-1} q^{n+j} = q^n \sum_{j=0}^{k-1} q^j \\
&= q^n \frac{1 - q^k}{1 - q} \leqslant \frac{q^n}{1 - q}.
\end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $0 \leqslant q < 1$ konvergiert die Folge $(\frac{q^n}{1-q})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0, daher finden wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{q^{n_0}}{1-q} < \varepsilon$. Demzufolge ist

$$|a_{n+k} - a_n| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geqslant n_0 \text{ und } k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Hieraus folgt

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \qquad \text{für alle } m, n \in \mathbb{N} \text{ mit } m, n \geqslant n_0.$$

[Denn: Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geqslant n_0$ beliebig. Ohne Einschränkung sei $m > n$. Dann ist $k := m - n \in \mathbb{N}$ und nach (1) ergibt sich $|a_m - a_n| = |a_{n+k} - a_n| < \varepsilon$.]