UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2008/09
18.11.2008

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

5. Übungsblatt

Aufgabe 1

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{3n-1}}{3^{2n+1}}$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k}$ **c)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$

Aufgabe 2

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n!}$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$ **c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ **e)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+(-1)^n}$ **f)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$

Aufgabe 3

Für $n \in \mathbb{N}$ seien $a_n := \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ und $b_n := \dfrac{\left(1+\frac{1}{2}(-1)^n\right)^n}{n^2}$.

a) Beweisen Sie: Es gilt $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ divergent ist.

c) Warum ist das Leibnizkriterium hier nicht anwendbar?

d) Was kann man mit dem Quotientenkriterium über die Konvergenz der Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sagen? Und was liefert das Wurzelkriterium?

Aufgabe 4

a) Es sei $p \in \mathbb{N}$ fest sowie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a. Zeigen Sie, dass $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+p})$ konvergiert und bestimmen Sie den Wert der Reihe.

b) Zeigen Sie, dass folgende Reihen konvergieren und bestimmen Sie ihre Reihenwerte.

i) $\displaystyle\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{n^2-p^2}$ für $p \in \mathbb{N}$ fest **ii)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}$ für $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$

Hinweis: Es ist $\frac{1}{n^2-p^2} = \frac{1}{2p}\left(\frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p}\right)$ für $n > p$ und $\frac{y}{1-y^2} = \frac{1}{1-y} - \frac{1}{1-y^2}$ für $|y| \neq 1$.

— bitte wenden —

Aufgabe 5

Für $n \in \mathbb{N}_0$ definiere $a_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dass aber das Cauchyprodukt der Reihe mit sich selbst divergiert.

Bemerkung: Dies ist ein Beispiel dafür, dass das Cauchyprodukt zweier konvergenter Reihen nicht konvergieren muss, wenn beide Reihen nicht absolut konvergieren.

Aufgabe 6

Berechnen Sie für $q \in (0,1)$ den Wert der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)q^n.$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst das Cauchyprodukt von $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mit sich selbst. Bilden Sie dann das Cauchyprodukt dieser Reihe mit $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$.

Aufgabe 7 (P)

Zeigen Sie, dass die Reihe

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + - \dots$$

konvergiert, die daraus durch Umordnung entstehende Reihe

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + + - \dots$$

jedoch divergiert.

Aufgabe 8 (P)

Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch

$$b_0 := 0\,, \qquad b_1 := 1\,, \qquad b_{n+1} := \frac{b_n + b_{n-1}}{2} \quad (n \in \mathbb{N})\,.$$

Beweisen Sie mit Hilfe des Cauchyschen Konvergenzkriteriums, dass (b_n) konvergiert.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $b_{n+1} - b_n = (-1)^n 2^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **3, 4, 5 und 7**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.
Die mit **(P)** gekennzeichneten Aufgaben beziehen sich auf den Stoff aus den Ergänzungen zur HM I für Studierende der Physik.