

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
 Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie
 Lösungsvorschläge zum 6. Übungsblatt**

Aufgabe 1

Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Wir zeigen mit vollständiger Induktion:

Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} z^n$ absolut konvergent, mit dem Wert $\frac{1}{(1-z)^{k+1}}$.

Induktionsanfang: Für $k = 0$ haben wir wegen $\binom{n+0}{n} = \binom{n}{n} = 1$ die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ vor uns. Diese ist bekanntlich absolut konvergent und hat den Wert $\frac{1}{1-z}$.

Induktionsschluss: Sei $k \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Für dieses k konvergiere $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} z^n$ absolut, mit dem Wert $\frac{1}{(1-z)^{k+1}}$ (IV). Wir bilden das Cauchyprodukt der zwei Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} z^n = \frac{1}{(1-z)^{k+1}} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} z^n$ absolut konvergent und, da auch die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ absolut konvergiert, ist das Cauchyprodukt der Reihen nach Satz 7.10 absolut konvergent und hat als Wert das Produkt der beiden Reihenwerte:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-z)^{k+2}} &= \frac{1}{(1-z)^{k+1}} \cdot \frac{1}{1-z} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} z^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^n \binom{m+k}{m} z^m z^{n-m} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^n \binom{m+k}{m} \right) z^n. \end{aligned}$$

Die Induktionsbehauptung ist also gezeigt, wenn wir noch $\sum_{m=0}^n \binom{m+k}{m} = \binom{n+k+1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ beweisen. Dazu verwenden wir vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$:

Induktionsanfang: Für $n = 0$ steht links $\binom{k}{0} = 1$ und rechts $\binom{k+1}{0} = 1$.

Induktionsschluss: Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Für dieses n gelte $\sum_{m=0}^n \binom{m+k}{m} = \binom{n+k+1}{n}$ (IV). Dann folgt

$$\sum_{m=0}^{n+1} \binom{m+k}{m} = \sum_{m=0}^n \binom{m+k}{m} + \binom{n+1+k}{n+1} \stackrel{\text{IV}}{=} \binom{n+k+1}{n} + \binom{n+k+1}{n+1} \stackrel{4.10}{=} \binom{n+k+2}{n+1} = \binom{(n+1)+k+1}{n+1}.$$

Da die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ absolut konvergent ist, ergibt sich für ihren Konvergenzradius $R \geq 1$. Zudem ist $\binom{n+k}{n} \geq 1$, also $\limsup_{n \rightarrow \infty} \binom{n+k}{n}^{1/n} \geq 1$ und damit $R \leq 1$. Folglich gilt $R = 1$.

Wegen $\binom{n+1}{n} = n+1$ und $\binom{n+2}{n} = \frac{1}{2}(n+2)(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ wissen wir nun

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n = \frac{1}{(1-z)^2} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) z^n = \frac{2}{(1-z)^3}.$$

Daraus folgt dann wegen $n^2 = (n+2)(n+1) - 3(n+1) + 1$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) z^n - 3 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n \\ &= \frac{2}{(1-z)^3} - \frac{3}{(1-z)^2} + \frac{1}{1-z} = \frac{2 - 3(1-z) + (1-z)^2}{(1-z)^3} = \frac{z^2 + z}{(1-z)^3} \end{aligned}$$

und wegen $2n + 1 = 2(n + 1) - 1$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)z^{2n} &= -z^0 + \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(z^2)^n = -1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(z^2)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (z^2)^n \\ &= -1 + \frac{2}{(1-z^2)^2} - \frac{1}{1-z^2} = \frac{-(1-z^2)^2 + 2 - (1-z^2)}{(1-z^2)^2} = \frac{3z^2 - z^4}{(1-z^2)^2}.\end{aligned}$$

Aufgabe 2

a) Die Reihe lässt sich als Differenz zweier Potenzreihen darstellen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1-2}{(n+1)!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+1)!} z^n.$$

Die erste Reihe ergibt $E(z)$, die zweite liefert für $z = 0$ den Wert 2 und für $z \neq 0$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+1)!} z^n = \frac{2}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} z^{n+1} = \frac{2}{z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \frac{2}{z} (E(z) - 1).$$

Insgesamt folgt: Die von $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!} z^n$ dargestellte Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist gegeben durch

$$f(0) = E(0) - 2 = -1, \quad f(z) = E(z) - \frac{2E(z) - 2}{z} = \frac{(z-2)E(z) + 2}{z} \quad (z \neq 0).$$

b) Hier ergibt sich gemäß der Reihendarstellung der Sinus-Funktion für jedes $z \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z+1)^{2n+2} = (z+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z+1)^{2n+1} = (z+1) \sin(z+1).$$

Aufgabe 3

a) Für $a_n := (2n+1)/(n-1)^2$ gilt

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{2n+1}{(n-1)^2} \cdot \frac{n^2}{2n+3} = \frac{2+1/n}{(1-1/n)^2} \cdot \frac{1}{2+3/n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{2} = 1.$$

Die Reihe hat daher den Konvergenzradius 1. Wir müssen nun noch die Ränder des Konvergenzintervalls, also $x = -1$ und $x = 1$, untersuchen. Dies liefert die zwei Reihen

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2} (-1)^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2}.$$

Die Konvergenz der ersten Reihe wird durch das Leibnizkriterium garantiert, denn

$$a_n = \frac{2n+1}{(n-1)^2} = \frac{2(n-1)+3}{(n-1)^2} = \frac{2}{n-1} + \frac{3}{(n-1)^2} \geq \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} = \frac{2n+3}{n^2} = a_{n+1}.$$

Die zweite Reihe hingegen divergiert wegen $a_n \geq 2n/n^2 = 2/n$ und des Minorantenkriteriums. Insgesamt: Die Reihe konvergiert nur für $x \in [-1, 1)$.

b) Wegen $\sqrt[n]{|1/n^n|} = 1/n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ hat diese Reihe den Konvergenzradius ∞ , d. h. sie konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

c) Die Reihe hat die Form $\sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k$ mit $a_{2n} = e^{n(1+(-1)^n)}$ und $a_{2n+1} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist

$$\sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \sqrt[2n]{|e^{n(1+(-1)^n)}|} = \begin{cases} e^{2n/2n} = e, & n \text{ gerade,} \\ e^{0/2n} = 1, & n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

und wegen $\sqrt[n+1]{|a_{2n+1}|} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = e$, d.h. die Potenzreihe hat den Konvergenzradius e^{-1} . Für $x = \pm e^{-1}$ ergibt sich die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n)} e^{-2n}.$$

Diese Reihe ist divergent, da für gerades n gilt: $e^{n(1+(-1)^n)} e^{-2n} = e^{2n} e^{-2n} = 1 \not\rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Die Potenzreihe konvergiert daher nur für $x \in (-e^{-1}, e^{-1})$.

Bemerkung: Man kann auch $y := x^2$ setzen und $\sum_{n=1}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n)} y^n$ betrachten. Diese Reihe hat Konvergenzradius e^{-2} , d.h. sie ist konvergent für $|y| < e^{-2}$ und divergent für $|y| > e^{-2}$. Hieraus folgt dann Konvergenz für $|x| < e^{-1}$ und Divergenz für $|x| > e^{-1}$.

- d) Für $a_n := 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ gilt offenbar $1 \leq a_n \leq n$. Wegen $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ folgt hieraus $\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ hat also den Konvergenzradius $R = 1^{-1} = 1$. Für $|z| = 1$ konvergiert die Reihe nicht, denn dann gilt $|a_n z^n| = a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, d.h. die Reihenglieder konvergieren nicht gegen 0. Konvergenz der Reihe liegt also nur für $|z| < 1$ vor.
- e) Auch diese Potenzreihe hat den Konvergenzradius 1, denn

$$\sqrt[k]{|2^k z^{k^2}|} = \sqrt[k]{2^k} \cdot \sqrt[k]{|z|^{k^2}} = 2|z|^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \begin{cases} 0, & |z| < 1, \\ \infty, & |z| > 1. \end{cases}$$

Auf dem Rand des Konvergenzkreises liegt keine Konvergenz vor, denn für $|z| = 1$ gilt $|2^k z^{k^2}| = 2^k \not\rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$). Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{k^2}$ konvergiert somit nur für $|z| < 1$.

- f) Für den Konvergenzradius R von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z+3i)^n$ mit $a_n := \frac{1}{n^2}$ ergibt sich wegen

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1$$

$R = 1^{-1} = 1$. Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2}$ konvergiert also für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+3i| < 1$ und divergiert für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+3i| > 1$. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+3i| = 1$ gilt

$$\left| \frac{(z+3i)^n}{n^2} \right| = \frac{|z+3i|^n}{n^2} = \frac{1}{n^2} \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}.$$

Wegen der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2}$ für $|z+3i| = 1$ nach dem Majorantenkriterium konvergent. Also konvergiert die Reihe genau für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+3i| \leq 1$.

Aufgabe 4

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x+y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

- a) Wegen $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$ ist $f(0) = 0$. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ folgt aus $0 = f(x+(-x)) = f(x) + f(-x)$

$$f(-x) = -f(x). \quad (1)$$

Für jedes $p \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt nach $(p-1)$ -maliger Verwendung der Voraussetzung

$$f(px) = pf(x).$$

Hieraus folgt mit (1)

$$f(px) = pf(x) \quad \text{für alle } p \in \mathbb{Z} \text{ und } x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Für alle $q \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ ergibt sich damit

$$f(x) = f(q \cdot \frac{1}{q} x) = q f(\frac{1}{q} x) \Rightarrow f(\frac{1}{q} x) = \frac{1}{q} f(x). \quad (3)$$

Sei nun $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$f(rx) = f(\frac{p}{q} x) \stackrel{(2)}{=} pf(\frac{1}{q} x) \stackrel{(3)}{=} \frac{p}{q} f(x) = rf(x).$$

- b) Sei f stetig in 0, d.h. für alle reellen Folgen (x_n) mit $x_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) gilt $f(x_n) \rightarrow f(0)$ ($n \rightarrow \infty$).

Beh.: f ist stetig auf $\mathbb{R}$, d.h. f ist stetig in y für alle $y \in \mathbb{R}$.

Sei $y \in \mathbb{R}$ beliebig und (x_n) sei eine reelle Folge mit $x_n \rightarrow y$ ($n \rightarrow \infty$). Zu zeigen ist $f(x_n) \rightarrow f(y)$ ($n \rightarrow \infty$). Es gilt

$$f(x_n) - f(y) \stackrel{(1)}{=} f(x_n) + f(-y) = f(x_n + (-y)) = f(x_n - y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(0) \stackrel{a)}{=} 0,$$

denn $x_n - y \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) und f ist im Nullpunkt stetig nach Voraussetzung. Also folgt

$$f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(y),$$

d.h. f ist stetig in y .

- c) Es sei $x \in \mathbb{R}$. Dann existiert eine Folge (r_n) rationaler Zahlen mit $r_n \rightarrow x$ für $n \rightarrow \infty$ (vgl. Beispiel (5) in Abschnitt 6.2). Aufgrund der Stetigkeit von f ergibt sich

$$f(r_n) \rightarrow f(x) \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Andererseits ist

$$f(r_n) = f(r_n \cdot 1) \stackrel{a)}{=} r_n f(1) \rightarrow x f(1) \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes folgt $f(x) = x f(1)$.

Aufgabe 5

Es gilt $f(0) = b$ und $f(2) = c - 2$. Aus $f(0) = f(2) = 0$ folgt daher $b = 0$ und $c = 2$. Auf $(-\infty, 1)$ und auf $(1, \infty)$ ist f nach Satz 8.3 stetig. Gemäß Satz 8.9 ist f stetig in 1 genau dann, wenn

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x)$$

gilt. Nun haben wir

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 2 + a = f(1) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 2 - 1 = 1;$$

also ist f genau für $a = -1$ stetig.

Aufgabe 6

- a) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $a_{n+1} \leq a_n$ und $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ konvergiert.}$$

Beweis:

“ $\Rightarrow$ ”: Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent. Wir setzen $b := \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Um die Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ zu zeigen, müssen wir begründen, dass die Folge $(s_K)_{K \in \mathbb{N}} := (\sum_{k=0}^K 2^k a_{2^k})_{K \in \mathbb{N}}$ für $K \rightarrow \infty$ konvergiert. Da (a_n) monoton fallend ist, gilt für jedes $K \in \mathbb{N}$

$$b \geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + \dots + a_8) + \dots + (a_{2^{K-1}+1} + \dots + a_{2^K}) \geq \frac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_4 + \dots + 2^{K-1} a_{2^K}.$$

Also ist $s_K = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^K a_{2^K} \leq 2b$ für jedes $K \in \mathbb{N}$, d.h. $(s_K)_{K \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt.

Wegen $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $(s_K)_{K \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend.

Nach Satz 6.4 ist $(s_K)_{K \in \mathbb{N}}$ konvergent, d.h. $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergiert.

“ $\Leftarrow$ ”: Nun konvergiere $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$. Wir schreiben wie zuvor $(s_K)_{K \in \mathbb{N}} := (\sum_{k=0}^K 2^k a_{2^k})_{K \in \mathbb{N}}$. Nach Voraussetzung ist (s_K) konvergent, etwa $s_K \rightarrow s$ ($K \rightarrow \infty$).

Ist $b_N := \sum_{n=1}^N a_n$ für $N \in \mathbb{N}$ gesetzt, so gilt für jedes K mit $2^K \geq N$

$$\begin{aligned} b_N &= a_1 + a_2 + \dots + a_N \leq a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + \dots + a_7) + \dots + (a_{2^K} + \dots + a_{2^{K+1}-1}) \\ &\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^K a_{2^K} = s_K \leq s. \end{aligned}$$

Also ist (b_N) beschränkt. Da (b_N) überdies monoton wachsend ist, liefert Satz 6.4 die Konvergenz von (b_N) , d.h. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

Setzt man statt der Monotonie nur $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ voraus, so ist die Aussage i.a. falsch. Ist beispielsweise die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben durch

$$a_n = \begin{cases} 1/n & \text{falls } n = 2^k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

also $(a_n) = (1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, 0, 0, \frac{1}{8}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{16}, \dots)$, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}$, jedoch ist $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1$ divergent.

- b) Für $\alpha \in \mathbb{Q}$ setze $a_n := \frac{1}{n^\alpha}$. Dann genügt (a_n) den Voraussetzungen von Teil a). Dieser liefert

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konvergent} &\quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(2^k)^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k \quad \text{konvergent} \\ &\quad \stackrel{\text{geom. Reihe}}{\Leftrightarrow} \quad \left|\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 7 (P)

- a) Laut Bernoullischer Ungleichung ist $(1+y)^n \geq 1+ny$ für alle $y \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere für $y = 1$ ergibt sich $2^n = (1+1)^n \geq 1+n$ bzw. $\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Damit gilt für jedes $x \geq 0$

$$x e^{x/2} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{x^{n+1}}{n!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \frac{x^{n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x - 1.$$

- b) Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx) + i \sin(nx)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{ix})^n}{n!} \\ &= e^{e^{ix}} = e^{\cos(x) + i \sin(x)} = e^{\cos(x)} e^{i \sin(x)} \\ &= e^{\cos(x)} [\cos(\sin(x)) + i \sin(\sin(x))] \\ &= e^{\cos(x)} \cos(\sin(x)) + i e^{\cos(x)} \sin(\sin(x)). \end{aligned}$$

Vergleich von Real- und Imaginärteil ergibt die Identitäten

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n!} = e^{\cos(x)} \cos(\sin(x)) \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n!} = e^{\cos(x)} \sin(\sin(x)).$$

Aufgabe 8 (P)

- a) Es gilt $f_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $f_n(0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Für $x > 0$ gilt

$$f_n(x) = \frac{x + nx^2 + nx}{1 + nx} = \frac{x/n + x^2 + x}{1/n + x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x} = x + 1.$$

Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert also punktweise gegen die Funktion $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

Auf $[0, \infty)$ ist die Konvergenz nicht gleichmäßig, da die Funktion f in 0 unstetig ist, alle f_n dort aber stetig sind (vgl. Satz E7.5 (b)).

Auf $[a, \infty)$ mit einem $a > 0$ liegt dagegen gleichmäßige Konvergenz vor. Für jedes $x \in [a, \infty)$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \frac{x + nx^2 + nx}{1 + nx} - (x + 1) \right| = \left| \frac{x + nx^2 + nx - (x + 1)(1 + nx)}{1 + nx} \right| \\ &= \left| \frac{x + nx^2 + nx - x - nx^2 - 1 - nx}{1 + nx} \right| = \left| \frac{-1}{1 + nx} \right| \leq \frac{1}{1 + na} =: c_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Nach Satz E7.4 (a) konvergiert (f_n) auf $[a, \infty)$ gleichmäßig gegen f .

- b) Es gilt $f_n(0) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist $x \in (0, 1]$, so folgt $|1 - x| < 1$ und damit

$$f_n(x) = (1 - x)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert also punktweise gegen die Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \in (0, 1]. \end{cases}$$

Auf $[0, 1]$ ist diese Funktion unstetig, im Gegensatz zu den Funktionen f_n ; also kann die Konvergenz auf $[0, 1]$ nicht gleichmäßig sein.

Auf $[\frac{1}{2}, 1]$ liegt jedoch gleichmäßige Konvergenz vor: Für alle $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ gilt wegen $|1 - x| \leq \frac{1}{2}$

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = |(1 - x)^n| = |1 - x|^n \leq 2^{-n},$$

und nach Satz E7.4 (a) bedeutet dies gleichmäßige Konvergenz.

- c) Offenbar gilt $f_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $x \in (0, 1]$ ist $q := 1 - x \in [0, 1)$ und es ergibt sich

$$f_n(x) = nxq^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

(Dass $nq^n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ gilt, folgt daraus, dass wegen $\sqrt[n]{nq^n} \rightarrow q < 1$ für $n \rightarrow \infty$ die Reihe über nq^n konvergiert.) Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert also punktweise gegen die Funktion f mit $f(x) = 0$ für alle $x \in [0, 1]$.

Obwohl die Grenzfunktion f stetig ist, liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor: Gemäß Definition konvergiert die Funktionenfolge (f_n) gleichmäßig auf $[0, 1]$ gegen f , falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall x \in [0, 1] : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

erfüllt ist. Negation liefert die Bedingung, dass die Funktionenfolge (f_n) nicht gleichmäßig auf $[0, 1]$ gegen f konvergiert:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n \geq n_0 \exists x \in [0, 1] : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon.$$

Wegen

$$f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = n \cdot \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{n}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{n}{n+1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{1+1/n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-1}$$

gilt $|f_n(\frac{1}{n+1})| \geq \frac{1}{2}e^{-1}$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

Ist $\varepsilon := \frac{1}{2}e^{-1}$ gesetzt, dann finden wir also zu jedem $n_0 \in \mathbb{N}$ ein $n \geq n_0$ und ein $x \in [0, 1]$ mit $|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| \geq \varepsilon$ (nämlich $x = \frac{1}{n+1}$). Dies schließt gleichmäßige Konvergenz aus.