UNIVERSITÄT KARLSRUHE WS 2008/09
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Das Additionstheorem $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ liefert für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\sin(2x) = \sin(x+x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x\,.$$

b) Ebenso folgt aus $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ die Gleichung

$$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x\,,$$

und mit der aus der Vorlesung bekannten Formel $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ergibt sich für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \begin{cases} (1-\sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x\,, \\ \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1\,. \end{cases}$$

c) Das Additionstheorem liefert wegen $\cos(-b) = \cos b$ und $\sin(-b) = -\sin b$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos(-b) + \cos a \sin(-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b\,.$$

Mit $a := \frac{1}{2}(x+y)$ und $b := \frac{1}{2}(x-y)$ erhält man also

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= \sin(a+b) + \sin(a-b) \\ &= \big(\sin a \cos b + \cos a \sin b\big) + \big(\sin a \cos b - \cos a \sin b\big) = 2 \sin a \cos b\,. \end{aligned}$$

d) Genau wie eben überlegen wir uns zunächst

$$\cos(a-b) = \cos a \cos(-b) - \sin a \sin(-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

und erhalten dann mit $a := \frac{1}{2}(x+y)$ und $b := \frac{1}{2}(x-y)$

$$\begin{aligned} \cos x + \cos y &= \cos(a+b) + \cos(a-b) \\ &= \big(\cos a \cos b - \sin a \sin b\big) + \big(\cos a \cos b + \sin a \sin b\big) = 2 \cos a \cos b\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

a) Wir kennen die Potenzreihen für $\sin z$ und $\cos z$ um die Entwicklungsstelle 0. In Verbindung mit dem Additionstheorem für $\sin z$ ergibt sich für jedes $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} f(z) &= \sin(1+z-1) = \sin(1)\cos(z-1) + \cos(1)\sin(z-1) \\ &= \sin(1)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(z-1)^{2k} + \cos(1)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(z-1)^{2k+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n \end{aligned}$$

mit

$$a_n = \begin{cases} \sin(1)\,\frac{(-1)^{n/2}}{n!}\,, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \cos(1)\,\frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n!}\,, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Der Konvergenzradius der Reihe ist offensichtlich ∞.

b) Für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, \frac{1}{2}\}$ erhalten wir unter Verwendung der Identität $\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{2/3}{1+z} + \frac{1/3}{1-2z}$

$$f(z) = \frac{2/3}{3 + (z-2)} + \frac{1/3}{-3 - 2(z-2)} = \frac{2/9}{1 + (z-2)/3} + \frac{-1/9}{1 + 2(z-2)/3} .$$

Für $\frac{1}{3}|z-2| < 1$ gilt

$$\frac{1}{1 + (z-2)/3} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-2}{3}\right)^n$$

und für $\frac{2}{3}|z-2| < 1$ ist

$$\frac{1}{1 + 2(z-2)/3} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2(z-2)}{3}\right)^n . \qquad (*)$$

Hiermit folgt für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-2| < \frac{3}{2}$

$$f(z) = \frac{2}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-2}{3}\right)^n - \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2(z-2)}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2)^n$$

mit $a_n = \frac{2}{9}(-\frac{1}{3})^n - \frac{1}{9}(-\frac{2}{3})^n = (-\frac{1}{3})^{n+2}(2 - 2^n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Der Konvergenzradius beträgt $\frac{3}{2}$, weil die geometrische Reihe in $(*)$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $\frac{2}{3}|z-2| \geqslant 1$ divergiert.

Bemerkung: Die Darstellung $\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{2/3}{1+z} + \frac{1/3}{1-2z}$ kann man auf die folgende Weise erhalten ($\rightarrow$ Partialbruchzerlegung): Wegen $1 - z - 2z^2 = (1+z)(1-2z)$ machen wir den Ansatz

$$\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{a}{1+z} + \frac{b}{1-2z}$$

und müssen die Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ berechnen. Die rechte Seite dieser Gleichung liefert

$$\frac{a}{1+z} + \frac{b}{1-2z} = \frac{a(1-2z) + b(1+z)}{(1+z)(1-2z)} = \frac{a + b + (-2a+b)z}{1-z-2z^2} .$$

Die Darstellung gelingt also, wenn $a + b = 1$ und $-2a + b = -1$ sind. Dies bedeutet $a = \frac{2}{3}$ und $b = \frac{1}{3}$.

c) Wegen $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ (vgl. Aufgabe 1 b)) ergibt sich für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\big(1 + \cos(2x)\big) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(2x)^{2k} = 1 + \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} 2^{2k} x^{2k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

mit

$$a_n = \begin{cases} 1\,, & \text{falls } n = 0 \\ 0\,, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2}\,\frac{(-1)^{n/2}}{n!}\,2^n\,, & \text{falls } n \geqslant 2 \text{ ungerade} \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Der Konvergenzradius ist ∞.

Aufgabe 3

a) Für $x \neq 1$ gilt wegen $1 - x^3 = (1-x)(1+x+x^2)$ [Diese Gleichheit erhält man mit Hilfe der geometrischen Summenformel 4.11 (1) oder der Polynomdivision $(1-x^3) : (1-x)$.]

$$\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} = \frac{(1+x+x^2) - 3}{1-x^3} = \frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} = -\frac{x+2}{1+x+x^2} .$$

Damit ergibt sich für den Grenzwert

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right) = \lim_{x\to 1} -\frac{x+2}{1+x+x^2} = -\frac{1+2}{1+1+1^2} = -\frac{3}{3} = -1 .$$

b) Der Binomialsatz 4.11 (2) liefert für $x \neq 0$ die Darstellung

$$\left(1+\frac{42}{x}\right)^{42} = \sum_{k=0}^{42}\binom{42}{k}\left(\frac{42}{x}\right)^{k} = 1 + 42\cdot\frac{42}{x} + a_2\left(\frac{42}{x}\right)^{2} + \ldots + a_{42}\left(\frac{42}{x}\right)^{42}$$

mit $a_k := \binom{42}{k}$. Also erhalten wir

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{x}{42}\left(\left(1+\frac{42}{x}\right)^{42}-1\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{x}{42}\left(42\cdot\frac{42}{x} + a_2\left(\frac{42}{x}\right)^{2} + \ldots + a_{42}\left(\frac{42}{x}\right)^{42}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}\left(42 + a_2\left(\frac{42}{x}\right)^{1} + a_3\left(\frac{42}{x}\right)^{2} + \ldots + a_{42}\left(\frac{42}{x}\right)^{41}\right) = 42\,.\end{aligned}$$

c) Setzen wir zur Abkürzung $a := \sqrt[3]{8+x}$ und $b := 2$, so ergibt sich mit der bekannten Gleichung $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ [wieder geometrische Summenformel 4.11 (1) oder Polynomdivision] die Darstellung

$$\sqrt[3]{8+x} - 2 = a - b = \frac{(\sqrt[3]{8+x}\,)^3 - 2^3}{(\sqrt[3]{8+x}\,)^2 + 2\sqrt[3]{8+x} + 2^2} = \frac{x}{(\sqrt[3]{8+x}\,)^2 + 2\sqrt[3]{8+x} + 4}\,.$$

Folglich hat man nach Satz 8.3 und Beispiel in 8.6

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+x}-2}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt[3]{8+x}\,)^2 + 2\sqrt[3]{8+x} + 4} = \frac{1}{(\sqrt[3]{8}\,)^2 + 2\sqrt[3]{8} + 4} = \frac{1}{12}\,.$$

d) Dieser Grenzwert existiert nicht. Der Zähler des Bruchs hat in $x = 3$ nämlich keine Nullstelle, und wegen $(x^2-x)/(x+2) \to 6/5$ für $x \to 3$ gilt

$$\frac{x^2-x}{x^2-x-6} = \frac{1}{x-3}\cdot\frac{x^2-x}{x+2} \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{für } x \to 3+\,,\\ -\infty & \text{für } x \to 3-\,.\end{cases}$$

e) Sei $a \in (0,\infty)$. Für $a \neq 1$ ergibt sich

$$\frac{a^x-1}{x} = \frac{e^{x\ln a}-1}{x} = \frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}\cdot\ln a \xrightarrow{x\to 0} \lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}\cdot\ln a \overset{(*)}{=} \ln a\,.$$

Die Gleichheit in $(*)$ folgt sofort aus der Ungleichung 7.11 (11).

Für $a = 1$ gilt stets $a^x - 1 = 0$, also ist auch in diesem Falle der Grenzwert $0 = \ln a$.

f) Für alle $x \geqslant 1$ gilt

$$\sqrt{x\pm 1} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x\pm 1}\,)^2 - (\sqrt{x}\,)^2}{\sqrt{x\pm 1}+\sqrt{x}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{x\pm 1}+\sqrt{x}}\,,$$

und damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x} &= \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}\\ &= \frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}-(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\,)}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\,)(\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\,)} = \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\,)(\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\,)}\\ &= \frac{(x-1)-(x+1)}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\,)(\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\,)(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\,)}\,.\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{-2x^{3/2}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\,)(\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\,)(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\,)}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{-2}{\left(\sqrt{1+1/x}+1\right)\left(\sqrt{1-1/x}+1\right)\left(\sqrt{1-1/x}+\sqrt{1+1/x}\right)} = \frac{-2}{2\cdot 2\cdot 2} = -\frac{1}{4}\,.\end{aligned}$$

g) Mit der Reihenentwicklung von $\sin x$ hat man für jedes $x \neq 0$

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \frac{x - (x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots)}{x(x - \frac{1}{3!}x^3 + \ldots)} = \frac{\frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{5!}x^5 + \ldots}{x^2 - \frac{1}{3!}x^4 + \ldots},$$

und hieraus folgt wegen der Stetigkeit von Potenzreihen (vgl. Satz 8.7)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{5!}x^5 + \ldots}{x^3 - \frac{1}{3!}x^5 + \ldots} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3!} - \frac{1}{5!}x^2 + \ldots}{1 - \frac{1}{3!}x^2 + \ldots} = \frac{\frac{1}{3!}}{1} = \frac{1}{6}.$$

h) Wir erhalten wegen $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ [vgl. 7.12 (6) oder über Reihenentwicklung des Sinus]

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x}.$$

Bei dieser Umformung muss man beachten, dass aus $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ insbesondere folgt, dass $\sin x \neq 0$ in der Nähe von $x_0 = 0$ gilt.

Für jede Folge (x_n) mit $x_n \to 0$ und $x_n \neq 0$ hat man also $\sin x_n \to 0$ und $\sin x_n \neq 0$ für fast alle n. Daher folgt aus $\lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$

$$\frac{e^{\sin x_n} - 1}{\sin x_n} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Demnach existiert der zu untersuchende Grenzwert: $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x} = 1$.

Aufgabe 4

a) Sei $x > 0$. Wegen der Injektivität von $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist die gegebene Gleichung $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$ äquivalent zu

$$\ln(x^{\sqrt{x}}) = \ln\big((\sqrt{x}\,)^x\big) \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{x}\ln x = x \ln\sqrt{x} \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{x}\ln x = \tfrac{1}{2}x \ln x \quad\Leftrightarrow\quad (\sqrt{x} - \tfrac{1}{2}x)\ln x = 0.$$

Diese Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn $\ln x = 0$ (also $x = 1$) oder wenn $\sqrt{x} = \frac{1}{2}x$ gilt. Aus Letzterem folgt $x = \frac{1}{4}x^2$ und damit $x(1 - \frac{1}{4}x) = 0$, also $x = 4$. (Man beachte $x > 0$.) Somit gilt $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$ genau für $x = 1$ oder $x = 4$.

b) Sei $x \in \mathbb{R}$. Wir zeigen $|\sin(nx)| \leqslant n|\sin x|$ mittels vollständiger Induktion nach $n \in \mathbb{N}$.

IA: Für $n = 1$ ist die Abschätzung trivial: $|\sin(1\cdot x)| \leqslant 1 \cdot |\sin x|$.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte $|\sin(nx)| \leqslant n|\sin x|$ (IV). Dann folgt mit Hilfe des Additionstheorems für Sinus

$$\begin{aligned}|\sin((n+1)x)| &= |\sin(nx)\cos(x) + \cos(nx)\sin(x)| \leqslant |\sin(nx)| \cdot |\cos x| + |\cos(nx)| \cdot |\sin x| \\ &\overset{(**)}{\leqslant} |\sin(nx)| + |\sin x| \overset{\text{IV}}{\leqslant} n|\sin x| + |\sin x| = (n+1)|\sin x|.\end{aligned}$$

In $(**)$ verwendeten wir $|\cos y| \leqslant 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Dies, wie auch $|\sin y| \leqslant 1$, folgt sofort aus der Identität $(\sin y)^2 + (\cos y)^2 = 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5

a) Wir definieren die Funktion $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch $h(x) := x - g(x)$. Dann ist h als Komposition stetiger Funktionen stetig. Wegen $g([a,b]) \subset [a,b]$ gilt $h(a) = a - g(a) \leqslant a - a = 0$ und $h(b) = b - g(b) \geqslant b - b = 0$. Daher liegt $y_0 := 0$ zwischen den Funktionswerten $h(a)$ und $h(b)$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es (mind.) ein $x_0 \in [a,b]$ mit $h(x_0) = 0$, d.h. $g(x_0) = x_0$.

b) Auf dem Intervall $[0,2]$ ist f nach Satz 8.3 stetig. Zudem ist für $x \geqslant 0$ offenbar $f(x) \geqslant 0$ und $f(x) = \frac{x+3-1}{x+3} = 1 - \frac{1}{x+3} \leqslant 1$. Deshalb gilt für die stetige Funktion $f : [0,2] \to [0,2]$ gemäß **a)**: Es gibt (mindestens) ein $x_0 \in [0,2]$ mit $f(x_0) = x_0$. (Solch ein x_0 heißt *Fixpunkt* von f.)

c) Wir verifizieren zunächst, dass die Funktion $f : [0,2] \to [0,2]$ monoton wachsend ist. Für alle $x, y \in [0,2]$ gilt nämlich

$$x \leqslant y \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x+3} \geqslant \frac{1}{y+3} \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{1}{x+3} \leqslant 1 - \frac{1}{y+3} \quad \Rightarrow \quad f(x) \leqslant f(y)\,.$$

Nun zeigen wir, dass die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, definiert durch $y_0 \in [0,2]$ und $y_n := f(y_{n-1})$ für $n \in \mathbb{N}$, monoton ist. Dazu unterscheiden wir zwei Fälle:

Fall $y_0 \leqslant f(y_0)$: Die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist monoton wachsend, d.h. $\forall n \in \mathbb{N} : \; y_{n-1} \leqslant y_n$. Denn:
IA: $n = 1$. Es ist $y_0 \leqslant f(y_0) = y_1$.
IS: Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gelte $y_{n-1} \leqslant y_n$ (IV). Da f monoton wachsend ist, folgt

$$y_n = f(y_{n-1}) \overset{\text{IV}}{\leqslant} f(y_n) = y_{n+1}\,.$$

Fall $y_0 > f(y_0)$: Die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist monoton fallend, d.h. $\forall n \in \mathbb{N} : \; y_{n-1} \geqslant y_n$.
Dies kann man ähnlich wie eben durch vollständige Induktion beweisen.

Außerdem gilt $y_0 \in [0,2]$ und $y_n = f(y_{n-1}) \in [0,2]$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ beschränkt.

Die beschränkte und monotone Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert nach Satz 6.4.

Bemerkung: Macht man in der Rekursionsformel $y_{n+1} = f(y_n)$ den Grenzübergang $n \to \infty$ (und beachtet dabei die Stetigkeit von f), so ergibt sich für den Grenzwert a der Folge (y_n) die Gleichung

$$a = \lim_{n\to\infty} y_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(a)\,,$$

d.h. a ist Fixpunkt von f. Rechnen wir a aus: Es gilt $a = \frac{a+2}{a+3}$. Nach Multiplikation mit $a+3$ erhält man die quadratische Gleichung $a^2 + 2a - 2 = 0$ in a, die genau für $a = -1 + \sqrt{3}$ oder $a = -1 - \sqrt{3}$ erfüllt ist. Wegen $y_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ muss $a \geqslant 0$ gelten, also $a = -1 + \sqrt{3}$.

Aufgabe 6

a) Sei $a \in (0, \infty)$. Definitionsgemäß gilt

$$x_0 = a\,, \quad x_1 = a^{1/2}\,, \quad x_2 = (a^{1/2})^{1/2} = a^{1/4}\,, \quad x_3 = (a^{1/4})^{1/2} = a^{1/8}\,, \quad \ldots$$

Mit vollständiger Induktion beweisen wir $x_n = a^{1/2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

IA: $n = 0$. Nach Definition ist $x_0 = a$.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Es gelte $x_n = a^{1/2^n}$ (IV). Dann folgt

$$x_{n+1} = x_n^{1/2} \overset{\text{IV}}{=} (a^{1/2^n})^{1/2} = a^{1/2^{n+1}}.$$

Damit erhalten wir für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$y_n = 2^n(x_n - 1) = \frac{a^{1/2^n} - 1}{1/2^n}\,.$$

Wie wir in Aufgabe 3 e) gesehen haben, gilt $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$. Wegen $1/2^n \to 0$ $(n \to \infty)$ folgt $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{1/2^n}-1}{1/2^n} = \ln a$.

b) Seien $x, y \in (0, \infty)$. Da die Exponentialfunktion $E : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ streng monoton wachsend ist, ist die zu beweisende Ungleichung $\frac{\ln x + \ln y}{2} \leqslant \ln \frac{x+y}{2}$ äquivalent zu

$$E\biggl(\frac{\ln x + \ln y}{2}\biggr) \leqslant E\biggl(\ln \frac{x+y}{2}\biggr)\,.$$

Weil ln die Umkehrfunktion von E ist, ergibt sich hier auf der linken Seite

$$E\biggl(\frac{\ln x + \ln y}{2}\biggr) = \sqrt{E(\ln x + \ln y)} = \sqrt{E(\ln x)\,E(\ln y)} = \sqrt{xy}\,,$$

und auf der rechten Seite erhält man $\frac{x+y}{2}$. Also müssen wir lediglich

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$$

beweisen. Dies folgt mit der binomischen Formel:

$$\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{(\sqrt{x}\,)^2 - 2\sqrt{xy} + (\sqrt{y}\,)^2}{2} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y}\,)^2}{2} \geqslant 0\,.$$

c) Um $\ln x < x - 1$ für alle $x \in (0, \infty)$ mit $x \neq 1$ zu beweisen, verwenden wir, dass die Exponentialfunktion $E : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ streng monoton wachsend ist, und erhalten

$$\ln x < x - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad E(\ln x) < E(x-1) \quad \Longleftrightarrow \quad x < E(x-1)\,.$$

Für $x > 1$ gilt wegen $x - 1 > 0$

$$E(x-1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!} > \frac{(x-1)^0}{0!} + \frac{(x-1)^1}{1!} = 1 + (x-1) = x\,.$$

Für $x \in (0,1)$ erhält man wegen $1 - x \in (0,1)$

$$E(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{n!} < \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n = \frac{1}{1-(1-x)} = \frac{1}{x}\,.$$

Hieraus folgt dann

$$E(x-1) = \frac{1}{E(1-x)} > \frac{1}{1/x} = x\,.$$

Aufgabe 7 (P)

a) Setzt man $x = 1$ in $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$ ein, so ergibt sich der Wert 0. Für jedes $x \in (-1,1)$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x) = (1-x)\sum_{n=1}^{\infty} x^n = (1-x)x\sum_{k=0}^{\infty} x^k = x(1-x)\cdot\frac{1}{1-x} = x\,.$$

Die Funktionenreihe konvergiert also punktweise gegen die Funktion $f : (-1,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 1, \\ x, & x \in (-1,1). \end{cases}$$

Da diese Funktion, im Gegensatz zu den Partialsummenfunktionen $s_N : (-1,1] \to \mathbb{R}$, die durch $s_N(x) := \sum_{n=1}^{N} x^n(1-x)$ gegeben sind, nicht stetig in $x = 1$ ist, liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor (vgl. Satz E7.5 (b)).

Bemerkung: Auch auf dem Intervall $(-1,1)$ liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor: Für jedes $N \in \mathbb{N}$ und $x \in (-1,1)$ gilt

$$\Big|s_N(x) - f(x)\Big| = \Big|(1-x)x\sum_{n=0}^{N-1} x^n - x\Big| = \Big|(1-x)x\frac{1-x^N}{1-x} - x\Big| = |x^{N+1}| = |x|^{N+1}$$

sowie

$$|x|^{N+1} \geqslant \frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x| \geqslant \frac{1}{\sqrt[N+1]{2}}\,.$$

Obige Rechnung zeigt: Ist $\varepsilon := \frac{1}{2}$ gesetzt, dann finden wir zu jedem $N \in \mathbb{N}$ ein $x \in (-1,1)$ (etwa $x = \frac{1}{\sqrt[N+1]{2}}$) so, dass $|s_N(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon$ gilt. Dies schließt gleichmäßige Konvergenz aus.

b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ haben wir

$$\left|\frac{1}{x^2+n^2}\right| = \frac{1}{x^2+n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}\,.$$

Da die Reihe über $1/n^2$ konvergiert, folgt aus Satz E7.4 (b): Die vorliegende Funktionenreihe konvergiert gleichmäßig und damit auch punktweise auf $\mathbb{R}$.