UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2008/09
09.12.2008

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

8. Übungsblatt

Aufgabe 1

Bestimmen Sie alle Stetigkeitsstellen der folgenden Funktionen:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} & \text{für } x \notin \{1,3\} \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 1 \\ 0 & \text{für } x = 3 \end{cases}$

b) $f\colon [-7,3] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \min\{x^2+2x-15,\ x^3\} & \text{für } x \in [-7,-5] \cup [-1,3] \\ x+5 & \text{für } x \in (-5,-1) \end{cases}$

Aufgabe 2

Die Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{für } 0 < |x| \leqslant 1 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} .$$

a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

b) Bestimmen Sie den Wertebereich $f([-1,1])$ von f.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $|f(x)| \leqslant 1$ für alle $x \in [-1,1]$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass f eine Umkehrfunktion besitzt. Berechnen Sie f^{-1}.

d) Beweisen Sie, dass f^{-1} streng monoton wachsend ist.

e) Ist f streng monoton wachsend? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3

Beweisen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme für Sinus und Cosinus

a) $\cos\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; **b)** $\cos\frac{\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 4

a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil, Betrag und Argument von

$$z_1 = \left(1 - i\sqrt{3}\right)^{42}, \qquad z_2 = \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{201} .$$

b) Es sei $t \in (0, 2\pi)$. Ermitteln Sie die Polarkoordinaten von $z(t) := 1 - e^{it}$.

c) Gegeben sei die komplexe Zahl $z = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$. Berechnen Sie z^3 und z^{150}.

Aufgabe 5

Zeigen Sie die Identitäten

a) $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y, x+y \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$;

b) $\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|\arctan x + \arctan y| < \frac{\pi}{2}$;

c) $(\cosh x + \sinh x)^n = \cosh(nx) + \sinh(nx)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$;

d) $\operatorname{Arsinh} x = \ln\bigl(x + \sqrt{x^2+1}\bigr)$ für alle $x \in \mathbb{R}$;

e) $\operatorname{Artanh} x = \frac{1}{2}\ln\bigl(\frac{1+x}{1-x}\bigr)$ für alle $x \in (-1, 1)$.

Aufgabe 6

a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt

i) $2^{x-1} + 3^{x+1} = 2^{x+4} + 3^{x-1}$; **ii)** $x^{\log_{10} x} = 100\,x$.

b) Beweisen Sie

$$\log_2\bigl(\sqrt{7} - \sqrt{3}\bigr) = 2 - \log_2\bigl(\sqrt{7} + \sqrt{3}\bigr).$$

Aufgabe 7

Gegeben seien eine reelle Zahl x_0 sowie eine stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.
Weisen Sie nach, dass dann ein Punkt $(\xi, f(\xi))$ auf dem Graphen von f existiert so, dass der Abstand dieses Punktes zum Punkt $P := (x_0, 0)$ auf der x-Achse unter allen Abständen eines Kurvenpunktes zu P am kleinsten ist.
Gilt diese Aussage auch, wenn das Intervall $[a,b]$ durch (a,b) ersetzt wird?

Aufgabe 8 (P)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Gilt für die stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = 0,$$

so gibt es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $|f(x)| \leqslant |f(x_0)|$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wenn die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig ist und $f(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$ gilt, dann ist die Funktion $1/f$ beschränkt.

Klausur zur HM I: Montag, 16.03.2009, 08:00 - 10:00 Uhr

Anmeldeschluss: Freitag, 13.02.2009 (Vorlesungsende WS 08/09)

Detaillierte Informationen zur Prüfungsanmeldung entnehmen Sie bitte unserer Vorlesungshomepage

www.mathematik.uni-karlsruhe.de/mi1schneider/lehre/hm12008w/.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **2, 5 und 7**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.
Die mit **(P)** gekennzeichneten Aufgaben beziehen sich auf den Stoff aus den Ergänzungen zur HM I für Studierende der Physik.