UNIVERSITÄT KARLSRUHE WS 2008/09
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 9. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $k \in \mathbb{Z}$. Um zu beweisen, dass die Funktion $\arcsin_k : [-1,1] \to [\frac{2k-1}{2}\,\pi, \frac{2k+1}{2}\,\pi]$ die Umkehrfunktion der bijektiven Funktion $\sin_k : [\frac{2k-1}{2}\,\pi, \frac{2k+1}{2}\,\pi] \to [-1,1]$ ist, zeigen wir

(a) $\arcsin_k(\sin_k(x)) = x$ für alle $x \in \left[\frac{2k-1}{2}\,\pi, \frac{2k+1}{2}\,\pi\right]$ und
(b) $\sin_k(\arcsin_k(y)) = y$ für alle $y \in [-1,1]$.

Vorbemerkung: Für alle $u \in \mathbb{R}$ gilt nach dem Additionstheorem für Sinus

$$\sin(k\pi + u) = \sin(k\pi)\cos(u) + \cos(k\pi)\sin(u) = (-1)^k \sin(u)\,. \tag{1}$$

Zu (a): Sei $x \in [\frac{2k-1}{2}\,\pi, \frac{2k+1}{2}\,\pi]$ beliebig. Schreibt man $x = k\pi + u$ mit $u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, dann ergibt sich

$$\begin{aligned}\arcsin_k(\sin_k(x)) &= \arcsin_k(\sin(x)) = k\pi + (-1)^k \arcsin(\sin(x)) = k\pi + (-1)^k \arcsin(\sin(k\pi + u))\\ &\overset{(1)}{=} k\pi + (-1)^k \arcsin((-1)^k \sin(u)) = k\pi + (-1)^k(-1)^k \arcsin(\sin(u))\\ &= k\pi + u = x \qquad (\text{da } u \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]).\end{aligned}$$

Zu (b): Für jedes $y \in [-1,1]$ gilt

$$\begin{aligned}\sin_k(\arcsin_k(y)) &= \sin(\arcsin_k(y)) = \sin(k\pi + (-1)^k \arcsin(y))\\ &\overset{(1)}{=} (-1)^k \sin((-1)^k \arcsin(y)) = (-1)^{2k} \sin(\arcsin(y)) = y.\end{aligned}$$

Um zu beweisen, dass die Funktion $\arccos_k : [-1,1] \to [k\pi, (k+1)\pi]$ die Umkehrfunktion der bijektiven Funktion $\cos_k : [k\pi, (k+1)\pi] \to [-1,1]$ ist, zeigen wir

(c) $\arccos_k(\cos_k(x)) = x$ für alle $x \in [k\pi, (k+1)\pi]$ und
(d) $\cos_k(\arccos_k(y)) = y$ für alle $y \in [-1,1]$.

Wir verwenden (vgl. 9.2 (7))

$$\sin(x + \tfrac{\pi}{2}) = \cos(x) \qquad \text{bzw.} \qquad \sin(y) = \cos(y - \tfrac{\pi}{2}) \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Zu (c): Sei $x \in [k\pi, (k+1)\pi]$ beliebig. Dann ist $x + \frac{\pi}{2} \in [k\pi + \frac{\pi}{2}, (k+1)\pi + \frac{\pi}{2}]$, und es gilt

$$\begin{aligned}\arccos_k(\cos_k(x)) &= \arccos_k(\cos(x)) = \arcsin_{k+1}(\cos(x)) - \tfrac{\pi}{2} \overset{(2)}{=} \arcsin_{k+1}(\sin(x + \tfrac{\pi}{2})) - \tfrac{\pi}{2}\\ &= x + \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{2} = x \qquad (\text{nach (a), da } x + \tfrac{\pi}{2} \in [\tfrac{2(k+1)-1}{2}\,\pi, \tfrac{2(k+1)+1}{2}\,\pi]).\end{aligned}$$

Zu (d): Für jedes $y \in [-1,1]$ gilt

$$\cos_k(\arccos_k(y)) = \cos(\arcsin_{k+1}(y) - \tfrac{\pi}{2}) \overset{(2)}{=} \sin(\arcsin_{k+1}(y)) \overset{(b)}{=} y.$$

Aufgabe 2

a) Sei $y > 0$. Für jedes $x \in [0, y]$ gilt

$$x\, e^x = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}\,.$$

Da diese Potenzreihe um die Entwicklungsstelle 0 den Konvergenzradius ∞ besitzt, folgt nach Abschnitt 10.11 der Vorlesung

$$\int_0^y x\, e^x\, dx = \int_0^y \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n+2}}{(n+2)\, n!}\,.$$

Wegen

$$\frac{y^{n+2}}{(n+2)\, n!} = \frac{n+1}{n+2}\, \frac{y^{n+2}}{(n+1)!} = \Big(1 - \frac{1}{n+2}\Big) \frac{y^{n+2}}{(n+1)!} = \frac{y^{n+2}}{(n+1)!} - \frac{y^{n+2}}{(n+2)!}$$

ist

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n+2}}{(n+2)\, n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n+2}}{(n+1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n+2}}{(n+2)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^{k+1}}{k!} - \sum_{l=2}^{\infty} \frac{y^l}{l!} \\ &= y(e^y - 1) - (e^y - 1 - y) = (y-1)e^y + 1\,.\end{aligned}$$

b) Wie in Aufgabe 1 b) vom 7. Übungsblatt gesehen, gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos(2x))\,.$$

Deshalb erhält man mit Beispiel 10.11 (2)

$$\int_0^\pi \sin^2 x\, dx = \int_0^\pi \tfrac{1}{2}(1 - \cos(2x))\, dx = \tfrac{1}{2} \int_0^\pi 1\, dx - \tfrac{1}{2} \int_0^\pi \cos(2x)\, dx = \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{2} \tfrac{\sin(2\pi)}{2} = \tfrac{\pi}{2}\,.$$

Wegen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt hiermit

$$\int_0^\pi \cos^2 x\, dx = \int_0^\pi 1 - \sin^2 x\, dx = \int_0^\pi 1\, dx - \int_0^\pi \sin^2 x\, dx = \pi - \tfrac{\pi}{2} = \tfrac{\pi}{2}\,.$$

Aufgabe 3

Sei $f : [1,2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^x$. Zuerst bemerken wir, dass f als stetige Funktion über $[1,2]$ integrierbar ist. Betrachten wir für ein $n \in \mathbb{N}$ die Zerlegung $Z_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ des Intervalls $[1,2]$ mit $x_j := 1 + j/n$ für $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, so gilt für die Teilintervalle $I_j := [x_{j-1}, x_j]$

$$m_j := \inf f(I_j) = f(x_{j-1}) = e^{x_{j-1}} \qquad \text{und} \qquad M_j := \sup f(I_j) = f(x_j) = e^{x_j}\,,$$

denn f ist monoton wachsend. Somit ergibt sich wegen $|I_j| = x_j - x_{j-1} = \frac{1}{n}$ für die Untersumme von f bezüglich Z_n

$$\begin{aligned}s_f(Z_n) &= \sum_{j=1}^{n} m_j |I_j| = \sum_{j=1}^{n} \frac{e^{x_{j-1}}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{1+(j-1)/n} = \frac{e}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{(j-1)/n} = \frac{e}{n} \sum_{l=0}^{n-1} (e^{1/n})^l \\ &= \frac{e}{n} \cdot \frac{1 - (e^{1/n})^n}{1 - e^{1/n}} = \frac{e(1-e)}{n(1 - e^{1/n})} = e(e-1) \frac{1/n}{e^{1/n} - 1} \xrightarrow{n\to\infty} e(e-1)\,,\end{aligned}$$

und daraus folgt für das untere Integral von f

$$s_f = \sup\{\, s_f(Z) : Z \text{ ist Zerlegung von } [1,2] \,\} \geqslant \lim_{n\to\infty} s_f(Z_n) = e(e-1)\,.$$

Für die Obersumme von f bezüglich Z_n erhält man

$$S_f(Z_n) = \sum_{j=1}^{n} M_j |I_j| = \sum_{j=1}^{n} \frac{e^{x_j}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{1+j/n} = \frac{e^{1+1/n}}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{(j-1)/n} = e^{1/n} s_f(Z_n)\,,$$

so dass auch $S_f(Z_n) \to e(e-1)$ für $n \to \infty$ folgt. Damit besteht die Abschätzung

$$S_f = \inf\{\, S_f(Z) : Z \text{ ist Zerlegung von } [1,2]\,\} \leqslant \lim_{n\to\infty} S_f(Z_n) = e(e-1)$$

für das obere Integral. Da stets $s_f \leqslant S_f$ gilt, haben wir $e(e-1) \leqslant s_f \leqslant S_f \leqslant e(e-1)$, d. h. $s_f = S_f = e(e-1)$, und dies bedeutet $\int_1^2 f(x)\,dx = e(e-1)$.

Aufgabe 4

1. Schritt: $f, g \in R[a,b] \;\Rightarrow\; f+g \in R[a,b]$ und $\int_a^b (f+g)\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx$.

Seien Z_1, Z_2 beliebige Zerlegungen von $[a,b]$ und $Z := Z_1 \cup Z_2 = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ mit $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Wegen

$$\begin{aligned}
\inf(f+g)([x_{j-1},x_j]) &= \inf\{f(x)+g(x):\ x \in [x_{j-1},x_j]\} \\
&\overset{\text{Satz 4.6 (2)}}{\geqslant} \inf\{f(x)+g(\tilde{x}):\ x,\tilde{x} \in [x_{j-1},x_j]\} \\
&\overset{\text{A5, 2. Üblatt}}{=} \inf\{f(x):\ x \in [x_{j-1},x_j]\} + \inf\{g(\tilde{x}):\ \tilde{x} \in [x_{j-1},x_j]\} \\
&= \inf f([x_{j-1},x_j]) + \inf g([x_{j-1},x_j])
\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}
s_{f+g}(Z) &= \sum_{j=1}^{n} \inf(f+g)([x_{j-1},x_j]) \cdot (x_j - x_{j-1}) \\
&\geqslant \sum_{j=1}^{n} \inf f([x_{j-1},x_j]) \cdot (x_j - x_{j-1}) + \sum_{j=1}^{n} \inf g([x_{j-1},x_j]) \cdot (x_j - x_{j-1}) \\
&= s_f(Z) + s_g(Z) \overset{\text{Satz in 10.1}}{\geqslant} s_f(Z_1) + s_g(Z_2)\,.
\end{aligned}$$

Aufgrund von $s_{f+g}(Z) \leqslant \sup\{\, s_{f+g}(Z') : Z' \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\,\} = s_{f+g}$ folgt

$$s_{f+g} \geqslant s_f(Z_1) + s_g(Z_2)\,.$$

Da Z_1 eine beliebige Zerlegung von $[a,b]$ war, ergibt sich

$$s_{f+g} \geqslant s_f + s_g(Z_2)\,.$$

Da Z_2 eine beliebige Zerlegung von $[a,b]$ war, ergibt sich

$$s_{f+g} \geqslant s_f + s_g\,. \tag{3}$$

Für das obere Integral wollen wir durch eine ähnliche Rechnung die Abschätzung $S_{f+g} \leqslant S_f + S_g$ einsehen. Wegen

$$\begin{aligned}
\sup(f+g)([x_{j-1},x_j]) &= \sup\{f(x)+g(x):\ x \in [x_{j-1},x_j]\} \\
&\overset{\text{Satz 4.6 (2)}}{\leqslant} \sup\{f(x)+g(\tilde{x}):\ x,\tilde{x} \in [x_{j-1},x_j]\} \\
&\overset{\text{A5, 2. Üblatt}}{=} \sup\{f(x):\ x \in [x_{j-1},x_j]\} + \sup\{g(\tilde{x}):\ \tilde{x} \in [x_{j-1},x_j]\} \\
&= \sup f([x_{j-1},x_j]) + \sup g([x_{j-1},x_j])
\end{aligned}$$

gilt

$$S_{f+g}(Z) = \sum_{j=1}^{n} \sup(f+g)([x_{j-1}, x_j]) \cdot (x_j - x_{j-1}) \leqslant S_f(Z) + S_g(Z) \leqslant S_f(Z_1) + S_g(Z_2)\,,$$

woraus wegen $S_{f+g}(Z) \geqslant \inf\{\, S_{f+g}(Z') : Z' \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\,\} = S_{f+g}$

$$S_{f+g} \leqslant S_f(Z_1) + S_g(Z_2)$$

folgt. Analog wie zuvor schließen wir hieraus

$$S_{f+g} \leqslant S_f + S_g\,. \tag{4}$$

Da stets $s_{f+g} \leqslant S_{f+g}$ gilt, erhalten wir

$$S_{f+g} \overset{(4)}{\leqslant} S_f + S_g \overset{f,g\in R[a,b]}{=} s_f + s_g \overset{(3)}{\leqslant} s_{f+g} \leqslant S_{f+g}\,,$$

also überall "=". Somit ist $f+g \in R[a,b]$, und es gilt

$$\int_a^b (f+g)\,dx = s_{f+g} = s_f + s_g = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx\,.$$

2. Schritt: $\alpha \geqslant 0, f \in R[a,b] \;\Rightarrow\; \alpha f \in R[a,b]$ und $\int_a^b (\alpha f)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx$.
Sei $\alpha \geqslant 0$ und $f \in R[a,b]$. Für jedes Teilintervall $[y,z]$ von $[a,b]$ gilt

$$\sup(\alpha f)([y,z]) = \sup\{\alpha f(x) : x \in [y,z]\} = \alpha \sup\{f(x) : x \in [y,z]\} = \alpha \sup f([y,z])$$

und

$$\inf(\alpha f)([y,z]) = \inf\{\alpha f(x) : x \in [y,z]\} = \alpha \inf\{f(x) : x \in [y,z]\} = \alpha \inf f([y,z])\,.$$

Damit folgt sofort aus der Definition der Ober- und Untersumme für jede Zerlegung Z von $[a,b]$

$$S_{\alpha f}(Z) = \alpha S_f(Z) \qquad \text{und} \qquad s_{\alpha f}(Z) = \alpha s_f(Z)\,.$$

Hiermit ergibt sich

$$\begin{aligned} s_{\alpha f} &= \sup\{\alpha s_f(Z) :\ Z \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\} = \alpha s_f \\ &\overset{f\in R[a,b]}{=} \alpha S_f = \inf\{\alpha S_f(Z) :\ Z \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\} = S_{\alpha f}\,. \end{aligned}$$

Also ist $\alpha f \in R[a,b]$, und es gilt

$$\int_a^b (\alpha f)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx\,.$$

3. Schritt: $f \in R[a,b] \;\Rightarrow\; -f \in R[a,b]$ und $\int_a^b (-f)\,dx = -\int_a^b f\,dx$.
Sei $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ mit $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ eine beliebige Zerlegungen von $[a,b]$.
Dann gilt

$$\begin{aligned} s_{-f}(Z) &= \sum_{j=1}^{n} \inf(-f)([x_{j-1}, x_j]) \cdot (x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} \inf\{-f(x) :\ x \in [x_{j-1}, x_j]\} \cdot (x_j - x_{j-1}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} -\sup\{f(x) :\ x \in [x_{j-1}, x_j]\} \cdot (x_j - x_{j-1}) = -\sum_{j=1}^{n} \sup f([x_{j-1}, x_j]) \cdot (x_j - x_{j-1}) = -S_f(Z) \end{aligned}$$

und

$$S_{-f}(Z) = \sum_{j=1}^{n} \sup(-f)([x_{j-1}, x_j]) \cdot (x_j - x_{j-1}) = -\sum_{j=1}^{n} \inf f([x_{j-1}, x_j]) \cdot (x_j - x_{j-1}) = -s_f(Z)\,.$$

Hiermit ergibt sich

$$\begin{aligned} s_{-f} &= \sup\{-S_f(Z): \; Z \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\} = -S_f \\ &\overset{f\in R[a,b]}{=} -s_f = \inf\{-s_f(Z): \; Z \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\} = S_{-f}\,. \end{aligned}$$

Also ist $-f \in R[a,b]$, und es gilt

$$\int_a^b (-f)\,dx = -\int_a^b f\,dx\,.$$

4. Schritt: $\alpha < 0, f \in R[a,b] \;\Rightarrow\; \alpha f \in R[a,b]$ und $\int_a^b (\alpha f)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx$.

Seien $\alpha < 0$ und $f \in R[a,b]$. Wir benutzen die Darstellung $\alpha = (-1)\cdot|\alpha|$. Aus dem 2. Schritt folgt $|\alpha| f \in R[a,b]$ und $\int_a^b (|\alpha| f)\,dx = |\alpha| \int_a^b f\,dx$. Hieraus ergibt sich mit dem 3. Schritt: $-|\alpha| f \in R[a,b]$ und $\int_a^b (-|\alpha| f)\,dx = -|\alpha| \int_a^b f\,dx$ bzw. $\alpha f \in R[a,b]$ und $\int_a^b (\alpha f)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx$.

5. Schritt: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, f, g \in R[a,b] \;\Rightarrow\; \alpha f + \beta g \in R[a,b]$ und $\int_a^b (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx + \beta \int_a^b g\,dx$.

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $f, g \in R[a,b]$. Nach Schritt 2 oder 4 gilt $\alpha f \in R[a,b]$ mit $\int_a^b (\alpha f)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx$ sowie $\beta g \in R[a,b]$ mit $\int_a^b (\beta g)\,dx = \beta \int_a^b g\,dx$. Schritt 1 liefert daher $\alpha f + \beta g \in R[a,b]$ mit

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\,dx = \int_a^b (\alpha f)\,dx + \int_a^b (\beta g)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx + \beta \int_a^b g\,dx\,.$$

Aufgabe 5

a) Siehe Satz E9.1 aus den Ergänzungen zur HM I für Studierende der Physik.

b) Seien $f \in R[a,b]$ und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Es gelte $f(x) \neq g(x)$ für höchstens endlich viele $x \in [a,b]$.

Setze $h := f - g$ sowie $M := \{x \in [a,b] : \; f(x) \neq g(x)\}$. Wegen $h(x) = 0$ für alle $x \in [a,b] \setminus M$ ist h auf $[a,b] \setminus M$ stetig. Da M (nach Voraussetzung) endlich viele Elemente enthält, ist f in höchstens endlich vielen Stellen in $[a,b]$ unstetig und damit gemäß a) über $[a,b]$ integrierbar. Wie in Aufgabe 4 gesehen, gilt mit $h, f \in R[a,b]$ auch $g = f - h \in R[a,b]$.

Es verbleibt $\int_a^b h\,dx = 0$ zu beweisen, denn dann liefert Aufgabe 4: $\int_a^b g\,dx = \int_a^b f\,dx$. Wegen $|\int_a^b h\,dx| \leqslant \int_a^b |h|\,dx$ genügt es zu zeigen:

$$\int_a^b |h|\,dx = 0\,.$$

Es gilt $|h(x)| > 0$ für alle $x \in M$ und $h(x) = 0$ für alle $x \in [a,b] \setminus M$. Da M endlich ist, folgt $s_{|h|}(Z) = 0$ für jede Zerlegung Z von $[a,b]$. Demnach ist das untere Integral $s_{|h|} = 0$ und wegen $h \in R[a,b]$ ist $\int_a^b |h|\,dx = s_{|h|} = 0$.

Aufgabe 6

a) Sei $f\colon [a,b] \to [0,\infty)$ stetig und es existiere ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) > 0$.

Sei $\varepsilon := \frac{1}{2} f(x_0)$. Nach Voraussetzung ist $\varepsilon > 0$ und aufgrund der Stetigkeit von f in x_0 existiert ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in [a,b]$ mit $|x - x_0| < \delta$. Für solche x gilt

$$f(x) = f(x_0) - (-f(x) + f(x_0)) \geqslant f(x_0) - |f(x) - f(x_0)| \geqslant 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon\,.$$

Setzt man $\alpha := \max\{a, x_0 - \delta\}$ und $\beta := \min\{b, x_0 + \delta\}$, so gilt $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$ und $f(x) \geqslant \varepsilon$ für alle $x \in [\alpha, \beta]$. Zusammen mit der Abschätzung $f(x) \geqslant 0$ für alle $x \in [a,b]$ folgt

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^b f(x)\,dx \\ &\geqslant \int_a^\alpha 0\,dx + \int_\alpha^\beta \varepsilon\,dx + \int_\beta^b 0\,dx = (\beta - \alpha)\varepsilon > 0\,. \end{aligned}$$

b) Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(x) \geqslant g(x)$ für alle $x \in [a,b]$ und $f(x_0) > g(x_0)$ für ein $x_0 \in [a,b]$.

Betrachte die Funktion $h : [a,b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto h(x) := f(x) - g(x)$. Dann ist h als Komposition stetiger Funktionen stetig, und es gilt $h(x) \geqslant 0$ für alle $x \in [a,b]$. Außerdem ist $h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) > 0$. Somit sind die Voraussetzungen des a)-Teils für die Funktion h erfüllt. Dieser liefert

$$\int_a^b h(x)\,dx > 0\,,$$

woraus mit Aufgabe 4

$$\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx$$

folgt.

Aufgabe 7 (P)

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion so, dass $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ existieren.

Sei $\varepsilon > 0$. Um nachzuweisen, dass f auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist, müssen wir ein $\delta > 0$ finden mit

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R} \text{ mit } |x - y| < \delta\,.$$

Wegen der Existenz des Grenzwertes $\lim_{x\to\infty} f(x) =: \alpha$ gibt es eine Konstante $M_+ > 0$ mit

$$|f(x) - \alpha| < \tfrac{\varepsilon}{4} \qquad \text{für alle } x \geqslant M_+\,.$$

Für alle $x, y \geqslant M_+$ gilt daher

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - \alpha| + |\alpha - f(y)| < \tfrac{\varepsilon}{4} + \tfrac{\varepsilon}{4} = \tfrac{\varepsilon}{2}\,. \tag{5}$$

Entsprechend gibt es wegen der Existenz von $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ eine Konstante $M_- > 0$ so, dass für alle $x, y \leqslant -M_-$ gilt

$$|f(x) - f(y)| < \tfrac{\varepsilon}{2}\,. \tag{6}$$

Setze $M := \max\{M_+, M_-\}$. Da $[-M, M]$ kompakt und f auf $[-M, M]$ stetig ist, ist f nach Satz E8.13 auf $[-M, M]$ gleichmäßig stetig, d.h. es gibt ein $\delta_1 > 0$ mit

$$\forall x, y \in [-M, M] :\ |x - y| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \tfrac{\varepsilon}{2}. \tag{7}$$

Setze $\delta := \min\{\delta_1, M\}$. Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig mit $|x - y| < \delta$. O.B.d.A. gelte $x \leqslant y$.
1. Fall: $x > M$.
Dann ist $y > M$ und es gilt nach (5)

$$|f(x) - f(y)| < \tfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

2. Fall: $x \in [-M, M]$.
Fall 2.1: Für $y \in [-M, M]$ gilt nach (7)

$$|f(x) - f(y)| < \tfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Fall 2.2: Für $y > M$ ergibt sich mit (7) und (5)

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(M)| + |f(M) - f(y)| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

3. Fall: $x < -M$.
Fall 3.1: $y < -M$. Analog wie 1. Fall [mit (6) anstelle von (5)].
Fall 3.2: $y \in [-M, M]$. Analog wie Fall 2.2 [mit (6) anstelle von (5)].
Fall 3.3: $y > M$. Dieser Fall tritt nicht auf wegen

$$|x - y| = y - x > M + M > M \geqslant \delta.$$

Insgesamt haben wir gezeigt: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \delta$ gilt $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Aufgabe 8 (P)

a) Es sei $f \in C([a,b])$ mit $\int_a^b |f(x)|\, dx = 0$.

Annahme: Es existiert ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) \neq 0$.

Betrachte die Funktion $h : [a,b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto h(x) := |f(x)|$. Dann ist h als Komposition stetiger Funktionen stetig mit $h(x) \geqslant 0$ für alle $x \in [a,b]$ und $h(x_0) = |f(x_0)| > 0$. Nach Aufgabe 6 a) gilt

$$0 < \int_a^b h(x)\, dx = \int_a^b |f(x)|\, dx\,.$$

im Widerspruch zur Voraussetzung $\int_a^b |f(x)|\, dx = 0$. Demnach ist die Annahme falsch und es gibt kein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) \neq 0$, d.h. für alle $x \in [a,b]$ gilt $f(x) = 0$.

b) Nun sei $f \in C([a,b])$ und für alle $g \in C([a,b])$ gelte $\int_a^b f(x)g(x)\, dx = 0$.

Speziell für $f = g$ gilt $\int_a^b (f(x))^2\, dx = 0$. Da die Funktion $h : [a,b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto h(x) := (f(x))^2$ stetig ist und $\int_a^b |h(x)|\, dx = 0$ gilt, liefert Teil a): $0 = h(x) = (f(x))^2$ für alle $x \in [a,b]$, also $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$.