UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2008/09

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 10. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[n]{e^{-k}} = \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{k}{n}-\frac{k-1}{n}\Big)e^{-\frac{k}{n}}\,.$$

Ist $x_k^{(n)} := \frac{k}{n}$ für $k = 0, 1, \dots, n$ gesetzt, so ist $Z_n := \{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}\} = \{0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ eine Zerlegung von $[0,1]$ und $\xi^{(n)} := (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}) = (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1)$ ein zu Z_n passender Zwischenvektor. Wir definieren $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{-x}$ und erhalten eine Riemann-Summe $\sigma_f(\xi^{(n)}, Z_n) := \sum_{k=1}^{n}(x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)})f(x_k^{(n)}) = \sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n}-\frac{k-1}{n})e^{-\frac{k}{n}}$. Da f als stetige Funktion über $[0,1]$ integrierbar ist und da $|Z_n| = \frac{1}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$ gilt, ergibt sich gemäß Satz 10.12

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[n]{e^{-k}} = \lim_{n\to\infty}\sigma_f(\xi^{(n)}, Z_n) = \int_0^1 f\,dx = \int_0^1 e^{-x}\,dx \overset{\text{Bsp. (2) in 10.11}}{=} 1 - e^{-1} = 1 - \tfrac{1}{e}\,.$$

b) Hier betrachten wir die Zerlegung $Z_n := \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 3\}$ des Intervalls $[0,3]$ und den passenden Zwischenvektor $\xi^{(n)} := (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 3)$. Erneut konvergiert die Feinheit von Z_n für $n \to \infty$ gegen Null. Mit der Funktion $g\colon [0,3] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(\pi x)$ gilt nach Satz 10.12

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{3n}\sin\big(\tfrac{k\pi}{n}\big) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{3n}\Big(\frac{k}{n}-\frac{k-1}{n}\Big)\sin\big(\tfrac{k\pi}{n}\big) = \lim_{n\to\infty}\sigma_g(\xi^{(n)}, Z_n) = \int_0^3 g\,dx \\ &= \int_0^3 \sin(\pi x)\,dx \overset{\text{Bsp. (2) in 10.11}}{=} \frac{1-\cos(3\pi)}{\pi} = \frac{2}{\pi}\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Alle Funktionen f_n sind stetig an der Stelle 0, denn für $x \neq 0$ gilt

$$|f_n(x)| = |x^n \sin(x^{-1})| \leqslant x^n\,,$$

woraus $f_n(x) \xrightarrow{x\to 0} 0 = f_n(0)$ folgt.
Die Funktion f_n ist differenzierbar in 0, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x\to 0}\frac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^n\sin(x^{-1})-0}{x} = \lim_{x\to 0} x^{n-1}\sin(x^{-1})$$

existiert. Für $n \geqslant 2$ existiert dieser Grenzwert [es handelt sich dann um $\lim_{x\to 0} f_{n-1}(x) = 0$], für $n = 1$ jedoch nicht: Für die Folge $(x_k)_k := ((\frac{\pi}{2} + k\pi)^{-1})_k$ gilt nämlich $x_k \to 0$ $(k \to \infty)$, aber

$$\frac{f_1(x_k)-f_1(0)}{x_k - 0} = \sin(x_k^{-1}) = \sin(\tfrac{\pi}{2} + k\pi) = (-1)^k$$

konvergiert für $k \to \infty$ nicht.

Aufgabe 3

Seien $\alpha > 1$, $C > 0$ und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C\,|x-y|^\alpha \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}\,.$$

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir zeigen, dass f in x_0 differenzierbar ist mit $f'(x_0) = 0$. Es gilt

$$0 \leqslant \lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leqslant \lim_{x \to x_0} \frac{C\,|x - x_0|^\alpha}{|x - x_0|} = C \lim_{x \to x_0} |x - x_0|^{\alpha - 1} = 0$$

wegen $\alpha - 1 > 0$. Damit ist

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0\,,$$

d.h. f ist in x_0 differenzierbar und es gilt $f'(x_0) = 0$.
Da $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig war, folgt, dass f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4

a) Nach Definition gilt $f(x) = x^{\sqrt[3]{x}} = e^{\ln(x)\cdot \sqrt[3]{x}}$ für jedes $x > 0$.
Ist $g\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x)\sqrt[3]{x}$ gesetzt, so ist $f(x) = e^{g(x)} = E(g(x))$. Die Kettenregel liefert

$$f'(x) = E'(g(x))\,g'(x) = E(g(x))\,g'(x) = f(x)\,g'(x)\,, \qquad x \in (0, \infty)\,.$$

Weiter gilt nach der Produktregel

$$g'(x) = \ln'(x)\,\sqrt[3]{x} + \ln(x)\ (x^{1/3})' = \frac{1}{x}\sqrt[3]{x} + \ln(x)\,\frac{1}{3}\,x^{-2/3} = \frac{\sqrt[3]{x}\,(3 + \ln(x))}{3x}\,, \qquad x \in (0, \infty)\,,$$

also

$$f'(x) = \frac{\sqrt[3]{x}\,(3 + \log(x))}{3x}\,f(x)\,, \qquad x \in (0, \infty)\,.$$

b) Anwendung der Produkt- und Kettenregel liefert für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = -2\sin(2x)\,e^{\sin x} + \cos(2x)\,e^{\sin x}\cos x = \big(\cos(2x)\ \cos x - 2\sin(2x)\big)\,e^{\sin x}\,.$$

c) Mit Hilfe der Kettenregel erhält man für jedes $x \in (1, \infty)$

$$f'(x) = \ln'(\ln x)\ \ln'(x) = \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}\,.$$

d) Für jedes $x \in (0, \pi)$ gilt [Man beachte $\sin x > 0$ für alle $x \in (0, \pi)$.]

$$f(x) = x^{\sin x}\,(\sin x)^x = e^{\ln(x)\cdot\sin x}\cdot e^{\ln(\sin x)\cdot x} = e^{\ln(x)\cdot \sin x + \ln(\sin x)\cdot x} = E(\ln(x)\cdot\sin x + \ln(\sin x)\cdot x)\,.$$

Mehrmalige Anwendung der Ketten- und Produktregel ergibt für jedes $x \in (0, \pi)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= E'(\ln(x)\cdot\sin x + \ln(\sin x)\cdot x)\cdot(\ln(x)\cdot\sin x + \ln(\sin x)\cdot x)' \\ &= E(\ln(x)\cdot\sin x + \ln(\sin x)\cdot x)\cdot\Big(\frac{1}{x}\sin x + \ln(x)\cos(x) + \frac{\cos x}{\sin x}\,x + \ln(\sin x)\Big) \\ &= x^{\sin x}\,(\sin x)^x\,\Big(\frac{\sin x}{x} + \ln(x)\cos(x) + \frac{x}{\tan x} + \ln(\sin x)\Big)\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 5

Wir betrachten die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_0^x \sin(e^t)\,dt$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin x$.
Dann ist f nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) = \sin(e^x)$. Bekanntlich ist auch g auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) = \cos x$. Wegen $F(x) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$ liefert die Kettenregel, dass F auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist mit

$$F'(x) = f'(g(x))\,g'(x) = \sin(e^{\sin x})\ \cos(x) \qquad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}\,.$$

Aufgabe 6

a) **i)** Wir betrachten die differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) := \cos x$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es zu jedem $x > 0$ ein $\xi \in (0, x)$ mit

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi)\,, \qquad \text{d.h.} \qquad \frac{\cos x - 1}{x} = -\sin\xi\,.$$

Speziell zu $x_n := \frac{1}{n}$ existiert ein solches $\xi_n \in (0, \frac{1}{n})$. Dann gilt $\xi_n \to 0$ für $n \to \infty$ und

$$n\big(1 - \cos\tfrac{1}{n}\big) = \frac{1 - \cos x_n}{x_n} = \sin\xi_n \xrightarrow{n\to\infty} \sin 0 = 0\,, \qquad \text{da sin in 0 stetig ist.}$$

ii) Hier betrachten wir die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ y \mapsto \cos\sqrt{y}$. Die Kettenregel liefert, dass f auf $(0,\infty)$ differenzierbar ist mit $f'(y) = \frac{-\sin\sqrt{y}}{2\sqrt{y}}$ für alle $y > 0$. Nach dem Mittelwertsatz existiert zu jedem $x > 1$ ein $\xi_x \in (x-1, x+1)$ mit

$$\frac{f(x+1) - f(x-1)}{(x+1) - (x-1)} = f'(\xi_x)\,, \qquad \text{d.h.} \qquad \frac{\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x-1}}{2} = \frac{-\sin\sqrt{\xi_x}}{2\sqrt{\xi_x}}\,.$$

Hieraus ergibt sich die Abschätzung

$$\big|\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x-1}\big| = \left|\frac{\sin\sqrt{\xi_x}}{\sqrt{\xi_x}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\xi_x}} \overset{\xi_x\in(x-1,x+1)}{\leqslant} \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,.$$

Wegen $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 0$ ist der zu bestimmende Grenzwert 0.

b) Für $t > 0$ setzen wir $f(t) := t\ln t$. Dann ist f differenzierbar mit $f'(t) = 1\cdot\ln t + t\cdot\frac{1}{t} = 1 + \ln t$. Zu $x > y > 0$ existiert gemäß Mittelwertsatz ein $\xi \in (y, x)$ mit

$$x\ln x - y\ln y = (x-y)f'(\xi) = (x-y)(1+\ln\xi) \leqslant (x-y)(1+\ln x)\,.$$

Aufgabe 7

a) Seien $0 \leqslant a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige und streng monoton wachsende Funktion mit $f(a) \geqslant 0$. Die (dann existierende) Umkehrfunktion von f sei $f^{-1}\colon [f(a), f(b)] \to [a,b]$.

Da die Funktionen f und f^{-1} stetig sind, gilt $f \in R[a,b]$ und $f^{-1} \in R[f(a), f(b)]$.

Sei $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ mit $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ eine beliebige Zerlegung von $[a,b]$. Da f streng monoton wachsend ist, ist $\tilde{Z} := f(Z) = \{f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$ eine Zerlegung von $[f(a), f(b)]$.

Unter Berücksichtigung der Monotonie von f und f^{-1} erhalten wir

$$\begin{aligned}
S_f(Z) + s_{f^{-1}}(\tilde{Z}) &= \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\sup f([x_{j-1}, x_j])}_{=f(x_j)}(x_j - x_{j-1}) + \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\inf f^{-1}([f(x_{j-1}), f(x_j)])}_{=f^{-1}(f(x_{j-1}))=x_{j-1}}(f(x_j) - f(x_{j-1})) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \Big[f(x_j)x_j - f(x_j)x_{j-1} + x_{j-1}f(x_j) - x_{j-1}f(x_{j-1})\Big] \\
&= \sum_{j=1}^{n} \Big[f(x_j)x_j - x_{j-1}f(x_{j-1})\Big] = f(x_n)x_n - x_0 f(x_0) = f(b)\,b - a\,f(a)\,.
\end{aligned}$$

Wegen $s_{f^{-1}} = \sup\{s_{f^{-1}}(Z') :\ Z' \text{ ist Zerlegung von } [f(a), f(b)]\} \geqslant s_{f^{-1}}(\tilde{Z})$ ergibt sich

$$S_f(Z) + s_{f^{-1}} \geqslant f(b)\,b - a\,f(a) \qquad \text{bzw.} \qquad S_f(Z) \geqslant b\,f(b) - a\,f(a) - s_{f^{-1}}\,.$$

Da Z eine beliebige Zerlegung von $[a,b]$ war, folgt

$$S_f = \inf\{ \underbrace{S_f(Z)}_{\geqslant b\,f(b)-a\,f(a)-s_{f^{-1}}} : Z \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\} \geqslant b\,f(b) - a\,f(a) - s_{f^{-1}}$$

bzw.

$$S_f + s_{f^{-1}} \geqslant b\,f(b) - a\,f(a)\,. \tag{1}$$

Mit einer analogen Rechnung zeigen wir $s_f + S_{f^{-1}} \leqslant b\,f(b) - a\,f(a)$. In der Tat gilt

$$\begin{aligned} s_f(Z) + S_{f^{-1}}(\tilde{Z}) &= \sum_{j=1}^n \underbrace{\inf f([x_{j-1},x_j])}_{=f(x_{j-1})}(x_j - x_{j-1}) + \sum_{j=1}^n \underbrace{\sup f^{-1}([f(x_{j-1}),f(x_j)])}_{=f^{-1}(f(x_j))=x_j}(f(x_j) - f(x_{j-1})) \\ &= \sum_{j=1}^n \Big[f(x_{j-1})x_j - f(x_{j-1})x_{j-1} + x_j f(x_j) - x_j f(x_{j-1}) \Big] \\ &= \sum_{j=1}^n \Big[f(x_j)x_j - x_{j-1}f(x_{j-1}) \Big] = f(x_n)x_n - x_0 f(x_0) = f(b)\,b - a\,f(a)\,. \end{aligned}$$

Wegen $S_{f^{-1}} = \inf\{S_{f^{-1}}(Z') : \ Z' \text{ ist Zerlegung von } [f(a),f(b)]\} \leqslant S_{f^{-1}}(\tilde{Z})$ ergibt sich

$$s_f(Z) + S_{f^{-1}} \leqslant f(b)\,b - a\,f(a)\,.$$

Da Z eine beliebige Zerlegung von $[a,b]$ war, folgt wie zuvor

$$s_f + S_{f^{-1}} \leqslant b\,f(b) - a\,f(a)\,. \tag{2}$$

Insgesamt haben wir

$$b\,f(b) - a\,f(a) \overset{(1)}{\leqslant} S_f + s_{f^{-1}} \overset{f\in R[a,b],\, f^{-1}\in R[f(a),f(b)]}{=} s_f + S_{f^{-1}} \overset{(2)}{\leqslant} b\,f(b) - a\,f(a)\,,$$

also überall "=". Folglich ist

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)\,dy = S_f + s_{f^{-1}} = b\,f(b) - a\,f(a)\,.$$

b) **i)** Wir wenden Teil a) an mit $a = 0$, beliebigem $b > 0$ und $f(x) := e^x$ für $x \in [0,b]$. Bekanntlich ist die Funktion $f : [0,b] \to [1,e^b]$ bijektiv, stetig und streng monoton wachsend mit $f(0) = 1 \geqslant 0$. Ihre Umkehrfunktion lautet $f^{-1} : [1,e^b] \to [0,b],\ y \mapsto \ln y$. Der a)-Teil liefert für jedes $b > 0$

$$\underbrace{\int_0^b e^x\,dx}_{=e^b-1} + \int_1^{e^b} \ln y\,dy = b\,e^b \quad \Longleftrightarrow \quad \int_1^{e^b} \ln y\,dy = (b-1)e^b + 1\,.$$

Nun sei $s > 1$. Speziell für $b = \ln s > 0$ ergibt sich

$$\int_1^s \ln y\,dy = (\ln s - 1)s + 1\,.$$

ii) Seien $m \in \mathbb{N}$ und $t > 0$. Wir benutzen den a)-Teil in der Situation $a = 0$, $b > 0$ beliebig und $f(x) = x^m$ für $x \in [0,b]$. Die Funktion $f : [0,b] \to [1,b^m]$ ist bijektiv, stetig und streng monoton wachsend mit $f(0) = 0 \geqslant 0$. Die Umkehrfunktion von f ist gegeben durch $f^{-1} : [0,b^m] \to [0,b],\ y \mapsto y^{1/m} = \sqrt[m]{y}$. Gemäß a) erhalten wir

$$\underbrace{\int_0^b x^m\,dx}_{=\frac{1}{m+1}b^{m+1}} + \int_0^{b^m} y^{1/m}\,dy = b\,f(b) = b^{m+1} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_0^{b^m} y^{1/m}\,dy = \big(1 - \tfrac{1}{m+1}\big)b^{m+1}\,.$$

Speziell für $b = t^{1/m}$ schließen wir

$$\int_0^t y^{1/m}\,dy = \tfrac{m}{m+1}\,t^{(m+1)/m}\,.$$

Aufgabe 8 (P)

Sei $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ stetig und streng monoton wachsend mit $f(0) = 0$ und $f(x) \to \infty$ $(x \to \infty)$. Weiter seien $s, t \geqslant 0$. Wir wenden das Resultat aus Aufgabe 7 a) an auf f, $a = 0$ und $b = f^{-1}(s)$ [Unter den gegebenen Voraussetzungen an f folgt mit dem Zwischenwertsatz $f([0,\infty)) = [0,\infty)$. Daher existiert $f^{-1}(s)$.]

$$\int_0^{f^{-1}(s)} f(x)\,dx + \int_0^s f^{-1}(y)\,dy = s\,f^{-1}(s)\,.$$

Addieren wir auf beiden Seiten $\int_{f^{-1}(s)}^t f(x)\,dx$ und benutzen Satz 10.9, so erhalten wir

$$\int_0^t f(x)\,dx + \int_0^s f^{-1}(y)\,dy = f^{-1}(s)\,s + \int_{f^{-1}(s)}^t f(x)\,dx\,.$$

Mit

$$f^{-1}(s)\,s = st - \big(t - f^{-1}(s)\big)s = st - \int_{f^{-1}(s)}^t s\,dx$$

ergibt sich

$$\int_0^t f(x)\,dx + \int_0^s f^{-1}(y)\,dy = st - \int_{f^{-1}(s)}^t s\,dx + \int_{f^{-1}(s)}^t f(x)\,dx = st + \int_{f^{-1}(s)}^t (f(x) - s)\,dx\,.$$

Hieraus folgt die behauptete Aussage, sobald wir

$$\int_{f^{-1}(s)}^t (f(x) - s)\,dx \begin{cases} = 0 & \text{für } s = f(t), \\ > 0 & \text{für } s \neq f(t) \end{cases} \tag{$*$}$$

gezeigt haben.

1. Fall: $s = f(t)$. Dann ist $f^{-1}(s) = t$ und damit $\int_{f^{-1}(s)}^t (f(x) - s)\,dx = \int_t^t (f(x) - s)\,dx = 0$.

2. Fall: $s < f(t)$ bzw. $f^{-1}(s) < t$. Für alle $x \in [f^{-1}(s), t]$ gilt $s = f(f^{-1}(s)) \leqslant f(x)$ bzw. $f(x) - s \geqslant 0$. Wegen $f(t) - s > 0$ und der Stetigkeit von $x \mapsto f(x) - s$ ergibt sich nach Aufgabe 6 a) vom 9. Übungsblatt

$$\int_{f^{-1}(s)}^t (f(x) - s)\,dx > 0\,.$$

3. Fall: $s > f(t)$ bzw. $f^{-1}(s) > t$. Für alle $x \in [t, f^{-1}(s)]$ gilt $s = f(f^{-1}(s)) \geqslant f(x)$ bzw. $s - f(x) \geqslant 0$. Wegen $s - f(t) > 0$ und der Stetigkeit von $x \mapsto s - f(x)$ ergibt sich nach Aufgabe 6 a) vom 9. Übungsblatt

$$\int_t^{f^{-1}(s)} (s - f(x))\,dx > 0\,, \qquad \text{also} \qquad \int_{f^{-1}(s)}^t (f(x) - s)\,dx > 0\,.$$

Damit ist $(*)$ bewiesen.

Bemerkung: Aus obigem Resultat kann man folgern:
Sind $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dann gilt für alle $s, t \geqslant 0$

$$st \leqslant \frac{s^p}{p} + \frac{t^q}{q}$$

mit Gleichheit genau für $s^p = t^q$.
(Dazu betrachtet man $f(x) = x^{q-1}$ für $x \geqslant 0$. Die Umkehrfunktion von f ist dann gegeben durch $f^{-1}(y) = y^{p-1}$ für $y > 0$.)

Aufgabe 9 (P)

a) Sei $a \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Da $f : x \mapsto \cos(x^2)$ als Komposition stetiger Funktionen auf $\mathbb{R}$ stetig ist, gibt es zu jedem $h > 0$ nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung ein $\xi_h \in [a-h, a+h]$ so, dass gilt

$$\int_{a-h}^{a+h} \cos(x^2)\, dx = \int_{a-h}^{a+h} 1\, dx\ \cos(\xi_h^2) = \big((a+h) - (a-h)\big) \cos(\xi_h^2) = 2h \cos(\xi_h^2)\,.$$

Also ist $\frac{1}{h} \int_{a-h}^{a+h} \cos(x^2)\, dx = 2\cos(\xi_h^2)$ für jedes $h > 0$. Für $h \to 0+$ konvergiert ξ_h gegen a und wegen der Stetigkeit von f konvergiert damit auch $\cos(\xi_h^2)$ gegen $\cos(a^2)$. Zusammen folgt

$$\lim_{h \to 0+} \frac{1}{h} \int_{a-h}^{a+h} \cos(x^2)\, dx = 2\cos(a^2)\,.$$

b) Sei $a \in \mathbb{R}$ fest. Für jedes $h > 0$ existiert nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung ein $\xi_h \in [a+h, a+2h]$ mit

$$\int_{a+h}^{a+2h} \ln x\ dx = ((a+2h) - (a+h)) \ln \xi_h = h \ln \xi_h\,.$$

Demzufolge ist $\frac{1}{h} \int_{a+h}^{a+2h} \ln x\ dx = \ln \xi_h$. Mit $h \to \infty$ geht ξ_h gegen ∞ und damit strebt auch $\ln \xi_h$ gegen ∞. Also konvergiert der Ausdruck $\frac{1}{h} \int_{a+h}^{a+2h} \ln x\ dx$ für $h \to \infty$ nicht.

c) Wir zeigen, dass der Grenzwert nicht existiert. Sei dazu $h > 1$ und $[h]$ bezeichne die größte natürliche Zahl, die kleiner oder gleich h ist, d.h. $[h] := \max\{k \in \mathbb{N} :\ k \leqslant h\}$.

Wir zerlegen das Intervall $[1, [h]]$ in die $[h]-1$ Intervalle $[n, n+1]$ für $n = 1, 2, \ldots, [h]-1$. Jedes dieser Intervalle hat die Länge 1. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung existiert für jedes dieser Intervalle ein $\xi_n \in [n, n+1]$ mit $\int_n^{n+1} 1/x\ dx = 1/\xi_n \geqslant 1/(n+1)$.

[Hier kann man auch mit der Monotonie des Integrals argumentieren: Wegen $1/x \geqslant 1/(n+1)$ für alle $x \in [n, n+1]$ gilt nach Satz 10.3 (1): $\int_n^{n+1} 1/x\ dx \geqslant \int_n^{n+1} 1/(n+1)\ dx = 1/(n+1)$.]

Damit gilt

$$\int_1^h \frac{1}{x}\, dx = \int_1^{[h]} \frac{1}{x}\, dx + \underbrace{\int_{[h]}^h \frac{1}{x}\, dx}_{\geqslant 0} \geqslant \int_1^{[h]} \frac{1}{x}\, dx = \sum_{n=1}^{[h]-1} \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\, dx \geqslant \sum_{n=1}^{[h]-1} \frac{1}{n+1} = \sum_{k=2}^{[h]} \frac{1}{k}\,.$$

Für $h \to \infty$ und damit $[h] \to \infty$ konvergiert diese Summe nicht [$\to$ harmonische Reihe]. Deshalb existiert der Grenzwert $\lim_{h\to\infty} \int_1^h \frac{1}{x}\, dx$ nicht.

Dies lässt sich auch mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung einsehen, denn für jedes $h > 0$ gilt

$$\int_1^h \frac{1}{x}\, dx = \ln x \Big|_1^h = \ln h - \ln 1 = \ln h \to \infty \qquad \text{für } h \to \infty\,.$$

d) Wir zeigen, dass der Grenzwert 0 ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$.

Wir zerlegen das Intervall $[0, 1]$ in zwei Teilintervalle so, dass der Betrag des Integrals über ein Teilintervall durch $\varepsilon/2$ abgeschätzt werden kann.

Das erste Intervall soll die Länge $\varepsilon/2$ haben. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es ein $\xi \in [0, \varepsilon/2]$ mit

$$\Big| \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} h^x \cos x\ dx \Big| = \big|\frac{\varepsilon}{2}\big|\ |h^\xi|\ |\cos\xi| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für jedes } h \in (0, 1)\,.$$

Für $\xi \in [\varepsilon/2, 1]$ gilt $\xi \geqslant \varepsilon/2$. Sei nun $h > 0$ so klein, dass $h^{\varepsilon/2} < \varepsilon/2$ ist. Dann gilt nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung für ein $\xi \in [\varepsilon/2, 1]$

$$\Big| \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{1} h^x \cos x \; dx \Big| \leqslant \underbrace{(1 - \varepsilon/2)}_{\leqslant 1} |h^\xi| \; |\cos \xi| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zusammen können wir abschätzen

$$\Big| \int_0^1 h^x \cos x \; dx \Big| = \Big| \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} h^x \cos x \; dx + \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^1 h^x \cos x \; dx \Big| \leqslant \Big| \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} h^x \cos x \; dx \Big| + \Big| \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^1 h^x \cos x \; dx \Big| < \varepsilon.$$

Also ist $\lim\limits_{h \to 0+} \int_0^1 h^x \cos x \, dx = 0$.