UNIVERSITÄT KARLSRUHE WS 2008/09
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 11. Übungsblatt

Aufgabe 1

Die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ ist auf $(0,\infty)$ differenzierbar. Um das Monotonieverhalten von f zu untersuchen, betrachten wir f'. Für jedes $x > 0$ gilt

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - (\ln x)\cdot 1}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2} \begin{cases} > 0 & \text{für } x < e, \\ < 0 & \text{für } x > e. \end{cases}$$

Somit ist f auf $\begin{cases} (0,e) \\ (e,\infty) \end{cases}$ streng monoton $\begin{cases} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{cases}$. Für $x, y \in (0,\infty)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} x^y > y^x \quad &\iff \quad e^{y\cdot\ln(x)} > e^{x\cdot\ln(y)} \quad \overset{\text{Exp.fkt. streng mon. wachsend}}{\iff} \quad y\cdot\ln(x) > x\cdot\ln(y) \\ &\iff \quad \frac{\ln(x)}{x} > \frac{\ln(y)}{y} \quad \iff \quad f(x) > f(y)\,. \end{aligned}$$

Da $\pi > e$ und f auf (e,∞) streng monoton fallend ist, folgt $f(\pi) < f(e)$. Deshalb liefert obige Äquivalenzkette $e^\pi > \pi^e$.

Aufgabe 2

a) Nach der Kettenregel ist die Funktion f auf $(0,\infty)$ differenzierbar und für alle $x > 0$ gilt

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(x^{-1})^2}\cdot\left(-x^{-2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0\,.$$

Da die Ableitung von f auf $(0,\infty)$ verschwindet, ist f dort konstant. Für alle $x > 0$ gilt

$$f(x) = f(1) = 2\arctan(1) = 2\cdot\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\pi}{2}\,.$$

b) Auf den gedruckten Übungsblättern hat sich leider ein Vorzeichenfehler eingeschlichen. Korrekt muss die Definition von g lauten: $g\colon [0,\pi/2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \arcsin(\cos x) - \arccos(\sin x)$.

Auf $(0,\pi/2)$ ist g differenzierbar mit

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(x)}}\cdot(-\sin x) - \frac{-1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}}\cdot\cos x \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sin^2(x)}}\cdot(-\sin x) - \frac{-1}{\sqrt{\cos^2(x)}}\cdot\cos x = \frac{-\sin x}{|\sin(x)|} + \frac{\cos x}{|\cos(x)|} \\ &= -1+1 = 0\,, \qquad \text{da } \sin x > 0, \cos x > 0 \text{ für alle } x \in (0,\pi/2)\,. \end{aligned}$$

Folglich ist g auf $(0,\pi/2)$ konstant mit

$$g(x) = g(\pi/4) = \arcsin(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) - \arccos(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) = \pi/4 - \pi/4 = 0 \qquad \text{für alle } x \in (0,\pi/2)\,.$$

Außerdem sind

$$\begin{aligned} g(0) &= \arcsin(1) - \arccos(0) = \pi/2 - \pi/2 = 0\,, \\ g(\pi/2) &= \arcsin(0) - \arccos(1) = 0 - 0 = 0\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 3

a) Es gilt $f'(x) = 8(e^{2x}+4)^{-2} \cdot 2e^{2x} = 16e^{2x}(e^{2x}+4)^{-2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$; also ist f streng monoton wachsend und damit injektiv. Wegen

$$\begin{aligned} 1-(f(x))^2 &= 1-\big(1-8(e^{2x}+4)^{-1}\big)^2 = 1-\big(1-16(e^{2x}+4)^{-1}+64(e^{2x}+4)^{-2}\big) \\ &= 16(e^{2x}+4)^{-1}-64(e^{2x}+4)^{-2} = 16(e^{2x}+4)^{-2}\big((e^{2x}+4)-4\big) = 16e^{2x}(e^{2x}+4)^{-2} \end{aligned}$$

gilt auch die behauptete Gleichung.

b) f hat als Bildbereich $(-1,1)$, denn $x \mapsto (e^{2x}+4)^{-1}$ hat als Bildbereich $(0,\frac{1}{4})$. Da stets $f'(x) \neq 0$ gilt, liefert der Satz über die Umkehrfunktion, dass $f^{-1}\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist mit

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \overset{\text{a)}}{=} \frac{1}{1-(f(f^{-1}(y)))^2} = \frac{1}{1-y^2} \qquad \text{für alle } y \in (-1,1)\,.$$

c) Wir lösen $f(x) = y$ nach x auf:

$$\begin{aligned} 1-8(e^{2x}+4)^{-1} = y &\iff (1-y)^{-1} = \tfrac{1}{8}(e^{2x}+4) \iff 8(1-y)^{-1}-4 = e^{2x} \\ &\iff x = \tfrac{1}{2}\ln\big(8(1-y)^{-1}-4\big)\,. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für jedes $y \in (-1,1)$

$$(f^{-1})'(y) = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{8(1-y)^{-1}-4}\cdot\frac{8}{(1-y)^2} = \frac{4}{8(1-y)-4(1-y)^2} = \frac{4}{4-4y^2} = \frac{1}{1-y^2}\,.$$

d) Es gilt $f(0) = 1-\frac{8}{5} = -\frac{3}{5}$, $f'(0) = 1-(-\frac{3}{5})^2 = \frac{16}{25}$, $f^{-1}(-\frac{3}{5}) = 0$ und $(f^{-1})'(-\frac{3}{5}) = \frac{25}{16}$.

$$T(x) = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0), \qquad \text{also} \qquad T(x) = \tfrac{16}{25}x-\tfrac{3}{5}$$

ist die Gleichung der Tangente an das Schaubild von f in $x_0 = 0$. Die Tangente an das Schaubild von f^{-1} in $y_0 = -\frac{3}{5}$ hat die Gleichung

$$T(y) = (f^{-1})'(y_0)(y-y_0)+f^{-1}(y_0), \qquad \text{also} \qquad T(y) = \tfrac{25}{16}y+\tfrac{15}{16}\,.$$

Aufgabe 4

a) Wir verwenden partielle Integration mit $f(x) = \arcsin x$ und $g'(x) = 1$:

$$\begin{aligned} \int \arcsin x\,dx &= \int 1\cdot\arcsin x\,dx = x\,\arcsin x - \int x\,\arcsin'(x)\,dx \\ &= x\,\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\,\arcsin x + \sqrt{1-x^2}\,. \end{aligned}$$

b) Hier substituieren wir $u = e^x$. Dies liefert $du = e^x\,dx$ und damit

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{1}{u^2+1}\,du\Big|_{u=e^x} = \arctan(u)\Big|_{u=e^x} = \arctan(e^x)\,.$$

c) Wir substituieren $u = 1-x$. Dies liefert $du = (-1)\,dx$, also

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx &= \int \frac{1-u}{\sqrt{u}}(-1)\,du\Big|_{u=1-x} = \int (u^{1/2}-u^{-1/2})\,du\Big|_{u=1-x} = \tfrac{2}{3}u^{3/2}-2u^{1/2}\Big|_{u=1-x} \\ &= \tfrac{2}{3}(1-x)^{3/2}-2(1-x)^{1/2}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 5

a) Hier kann man sofort eine Stammfunktion hinschreiben:

$$\int_0^1 (1+2x)^3\,dx = \tfrac{1}{8}(1+2x)^4\Big|_{x=0}^1 = \tfrac{1}{8}(3^4-1^4) = 10\,.$$

b) Wir zerlegen das Intervall:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 |x-1|\,dx &= \int_{-2}^1 |x-1|\,dx + \int_1^2 |x-1|\,dx = \int_{-2}^1 (1-x)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx \\ &= \big(x-\tfrac{1}{2}x^2\big)\Big|_{-2}^1 + \big(\tfrac{1}{2}x^2 - x\big)\Big|_1^2 \\ &= \big(1-\tfrac{1}{2}\big) - (-2-2) + (2-2) - \big(\tfrac{1}{2}-1\big) = 5\,.\end{aligned}$$

c) Wegen $(\sin^2 x)' = 2\sin x\cos x$ ist $\frac{1}{2}\sin^2 x$ eine Stammfunktion von $\sin x\cos x$:

$$\int_0^{\pi/2} \sin x\cos x\,dx = \tfrac{1}{2}\sin^2 x\big|_{x=0}^{\pi/2} = \tfrac{1}{2}\big(\sin^2(\tfrac{1}{2}\pi) - \sin^2(0)\big) = \tfrac{1}{2}(1-0) = \tfrac{1}{2}\,.$$

d) Auch hier kann man die Stammfunktion leicht finden:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{9-4x^2}}\,dx &= -\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{-8x}{2\sqrt{9-4x^2}}\,dx \\ &= -\tfrac{1}{4}\sqrt{9-4x^2}\,\Big|_{x=0}^1 = -\tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-\sqrt{9}\,) = \tfrac{1}{4}(3-\sqrt{5}\,)\,.\end{aligned}$$

e) Hier wenden wir die Substitutionsregel mit $g(t) = \sqrt{t}$ an. Wir ersetzen also $\sqrt{t}$ durch x und $g'(t)\,dt = (2\sqrt{t}\,)^{-1}\,dt$ durch dx. Dabei müssen wir auch die Integrationsgrenzen anpassen: $t=1$ entspricht $x = g(1) = 1$ und $t = 4$ entspricht $x = g(4) = 2$.

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}\,(1+\sqrt{t}\,)}\,dt &= \int_1^4 \frac{2}{1+\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt \\ &= \int_1^2 \frac{2}{1+x}\,dx = 2\ln|1+x|\,\Big|_{x=1}^2 = 2\big(\ln(3)-\ln(2)\big) = 2\ln\tfrac{3}{2}\,.\end{aligned}$$

f) Um dieses Integral zu berechnen, verwenden wir partielle Integration für $f(x) = \ln x$ und $g'(x) = x$. Mit $f'(x) = x^{-1}$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ folgt

$$\begin{aligned}\int_1^e x\ln x\,dx &= \int_1^e f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\big|_{x=1}^e - \int_1^e f'(x)g(x)\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}x^2\ln x\big|_{x=1}^e - \int_1^e \tfrac{1}{2}x^2x^{-1}\,dx = \tfrac{1}{2}(e^2\ln e - \ln 1) - \int_1^e \tfrac{1}{2}x\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}e^2 - \big(\tfrac{1}{4}x^2\big)\big|_{x=1}^e = \tfrac{1}{2}e^2 - \tfrac{1}{4}(e^2-1) = \tfrac{1}{4}(e^2+1)\,.\end{aligned}$$

g) Sei $k\in\mathbb{Z}$. Wir betrachten zunächst das Integral ohne Betrag:

$$\begin{aligned}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin x\,dx &= -\cos x\big|_{x=(k-1)\pi}^{k\pi} = -\cos(k\pi) + \cos((k-1)\pi) \\ &= -(-1)^k + (-1)^{k-1} = (-(-1)+1)(-1)^{k-1} = 2(-1)^{k-1}\,.\end{aligned}$$

Da die Sinusfunktion ihre Nullstellen genau in $k\pi$ mit $k\in\mathbb{Z}$ hat, ist $\sin x$ auf dem ganzen Intervall $[(k-1)\pi, k\pi]$ entweder $\geqslant 0$ oder $\leqslant 0$. Folglich gilt

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x|\,dx = \left|\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin x\,dx\right| = 2\,.$$

h) Wieder kommt partielle Integration zum Einsatz: $f(x) = \sin x$ und $g'(x) = \sin x$.

$$\int_0^\pi (\sin x)^2\,dx = \sin x \cdot (-\cos x)\Big|_{x=0}^{\pi} - \int_0^\pi \cos x \cdot (-\cos x)\,dx = \int_0^\pi (\cos x)^2\,dx$$
$$= \int_0^\pi \big(1 - (\sin x)^2\big)\,dx = \pi - \int_0^\pi (\sin x)^2\,dx$$

Betrachtet man nun den ersten und letzten Term in dieser Gleichungskette, so folgt

$$2\int_0^\pi (\sin x)^2\,dx = \pi\,, \qquad \text{also} \qquad \int_0^\pi (\sin x)^2\,dx = \tfrac{1}{2}\pi\,.$$

i) Wir substituieren zunächst $t = \sqrt{x}$, d.h. $x = t^2$. Dann ist $dx = 2t\,dt$ und aus $x : 1 \to 4$ ergibt sich $t : 1 \to 2$

$$\int_1^4 \arctan\sqrt{\sqrt{x} - 1}\,dx = \int_1^2 \arctan(\sqrt{t-1}\,) \cdot 2t\,dt\,;$$

nun substituieren wir $u = \sqrt{t-1}$, also $t = u^2 + 1$, $dt = 2u\,du$, $t : 1 \to 2$ wird zu $u : 0 \to 1$,

$$= \int_0^1 \arctan(u) \cdot 2(u^2+1) \cdot 2u\,du = \int_0^1 (4u^3 + 4u)\arctan(u)\,du\,.$$

(Natürlich hätten wir die beiden Substitutionen auch zu einer zusammenfassen können.) Dann führen wir eine partielle Integration aus mit $f(u) = \arctan(u)$ und $g'(u) = 4u^3 + 4u$:

$$= (u^4 + 2u^2)\arctan(u)\,\Big|_{u=0}^{1} - \int_0^1 (u^4 + 2u^2)\frac{1}{1+u^2}\,du$$
$$= 3\arctan(1) - \int_0^1 \frac{(u^2+1)^2 - 1}{1+u^2}\,du = \tfrac{3}{4}\pi - \int_0^1 (u^2+1)\,du + \int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\,du$$
$$= \tfrac{3}{4}\pi - (\tfrac{1}{3}u^3 + u)\Big|_{u=0}^{1} + \arctan(u)\Big|_{u=0}^{1} = \tfrac{3}{4}\pi - \tfrac{4}{3} + \tfrac{1}{4}\pi = \pi - \tfrac{4}{3}\,.$$

Aufgabe 6

a) Wir versuchen, ob wir die Regeln von de l'Hospital anwenden können. Hier konvergieren Zähler und Nenner gegen 0, die Ableitung des Nenners ist in der Nähe von 0 ungleich 0, aber

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x^2\cos(1/x))'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos(1/x) + x^2\sin(1/x)\frac{1}{x^2}}{\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos(1/x) + \sin(1/x)}{\cos x}$$

existiert nicht, denn für $x_n := ((n + \frac{1}{2})\pi)^{-1}$ hat der Bruch den Wert $(-1)^n / \cos x_n$. Die Regel von de l'Hospital ist nicht anwendbar; der ursprüngliche Grenzwert existiert aber:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos(1/x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot x\cos(1/x) = 1 \cdot 0 = 0\,.$$

b) Zu untersuchen ist hier $f(x)/g(x)$ für $f(x) := \int_0^x e^{t^2}\,dt$ und $g(x) := x^{-1}e^{x^2}$. Wir wenden die Regel von de l'Hospital an: Der zu untersuchende Grenzwert ist vom Typ „$\frac{\infty}{\infty}$“ (Beachte: für $x \geqslant 0$ gilt $f(x) \geqslant \int_0^x 1\,dt = x$) und wegen

$$f'(x) = e^{x^2}, \qquad g'(x) = -x^{-2}e^{x^2} + x^{-1}e^{x^2} \cdot 2x = (2 - x^{-2})e^{x^2}$$

gilt: Die Ableitung des Nenners ist für hinreichend große x stets $\neq 0$ und der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^2}}{(2 - x^{-2})e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2 - x^{-2}} = \frac{1}{2}$$

existiert. Folglich ist auch der zu untersuchende Grenzwert $\frac{1}{2}$.

c) Sowohl $f(x)$ als auch $g(x)$ streben für $x \to \infty$ gegen ∞. Als Ableitungen erhalten wir $f'(x) = 1 + \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x$ und

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x)e^{\sin x} + f(x)e^{\sin x}\cos x = e^{\sin x}(2\cos^2 x + x\cos x + \sin x \cos^2 x) \\ &= e^{\sin x}\cos x\,(2\cos x + x + \sin x \cos x)\,. \end{aligned}$$

Also wird $g'(x)$ auch für beliebig große x durch den Faktor $\cos x$ immer wieder 0. Daher ist die Regel von de l'Hospital nicht anwendbar. Der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{e^{\sin x}}$$

existiert nicht (Betrachte $x_n := (n + \frac{1}{2})\pi$), obwohl für jene x, für die $g'(x) \neq 0$ ist, gilt:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2\cos x}{e^{\sin x}(2\cos x + x + \sin x\cos x)} \xrightarrow{x\to\infty} 0\,.$$

Aufgabe 7

a) Es gilt

$$\lim_{x\to 0+} x\,\ln(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} -x = 0\,.$$

In $(*)$ verwendeten wir die Regel von de l'Hospital ($-\frac{1}{x^2} \neq 0$ für alle $x > 0$.). Hiermit folgt wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{x\ln(x)} = e^{\lim_{x\to 0+} x\ln(x)} = e^0 = 1\,.$$

b) Hier kann man die Regel von de l'Hospital zweimal anwenden (jeweils „$\frac{\infty}{\infty}$“ und die Ableitung des Nenners ist für hinreichend große x ungleich 0). Dies führt auf

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \text{(falls die Grenzwerte existieren),}$$

hilft also nicht, den Grenzwert zu berechnen. Einfaches Kürzen mit e^x liefert aber

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1\,.$$

c) Auch hier wenden wir zweimal hintereinander die Regel von de l'Hospital an (jeweils für „$\frac{0}{0}$“; die Ableitung des Nenners hat in der Nähe von 1 keine Nullstellen). Wegen $(x^x)' = (e^{x\ln x})' = x^x(x\ln x)' = x^x(1 + \ln x)$ ergibt sich

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{x^x(1+\ln x) - 1}{-1 + \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{x^x(1+\ln x)^2 + x^x\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1+1}{-1} = -2\,.$$

Aufgabe 8

Ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{x} & \text{für } x \geqslant 0, \\ -\sqrt{-x} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

gegeben, so ist f auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar mit

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{für } x > 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{-x}} & \text{für } x < 0 \end{cases} = \frac{1}{2\sqrt{|x|}}\,.$$

Das Newton-Verfahren liefert für einen beliebigen Startwert $x_0 \in (0, \infty)$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{\sqrt{x_0}}{\frac{1}{2\sqrt{x_0}}} = x_0 - 2x_0 = -x_0\,,$$
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_1 - \frac{-\sqrt{-x_1}}{\frac{1}{2\sqrt{-x_1}}} = -x_0 - \frac{-\sqrt{x_0}}{\frac{1}{2\sqrt{x_0}}} = -x_0 + 2x_0 = x_0\,.$$

Folglich ergibt das Newton-Verfahren die alternierende Folge $x_n = \begin{cases} x_0 & \text{für gerades } n, \\ -x_0 & \text{für ungerades } n. \end{cases}$ Diese Folge ist für alle $x_0 \in (0, \infty)$ divergent.

Aufgabe 9

Für $\lambda > 0$ ist die Funktion $f_\lambda \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f_\lambda(x) := \arctan(\lambda x)$.

a) Es gilt $f_\lambda(0) = 0$. Da f_λ injektiv ist, besitzt f_λ keine weiteren Nullstellen.

b) Nach der Kettenregel ist die Funktion f_3 auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$f_3'(x) = \arctan'(3x) \cdot 3 = \frac{3}{1 + (3x)^2}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Die ersten beiden Iterationsschritte des Newton-Verfahrens mit Startwert $x_0 = \frac{1}{3}$ lauten

$$x_1 = x_0 - \frac{f_3(x_0)}{f_3'(x_0)} = \frac{1}{3} - \frac{\arctan(1)}{\frac{3}{1+1}} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{6}\,,$$
$$x_2 = x_1 - \frac{f_3(x_1)}{f_3'(x_1)} = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{6} - \frac{\arctan(1 - \frac{\pi}{2})}{\frac{3}{1+(1-\frac{\pi}{2})^2}} = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{6} - \frac{1 + (1 - \frac{\pi}{2})^2}{3} \arctan(1 - \tfrac{\pi}{2})\,.$$

c) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $|x_0| \geqslant \frac{2}{\lambda}$. Wir wollen zeigen, dass das Newton-Verfahren nicht konvergent ist, d.h. dass die durch

$$x_{n+1} := x_n - f_\lambda'(x_n)^{-1} f_\lambda(x_n)\,, \qquad n \in \mathbb{N}_0\,,$$

rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nicht konvergiert. Zuerst beweisen wir mittels vollständiger Induktion: $|x_n| \geqslant \frac{2}{\lambda}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

IA: $n = 0$. Nach Wahl des Startwerts x_0 ist $|x_0| \geqslant \frac{2}{\lambda}$ erfüllt.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Für dieses n gelte $|x_n| \geqslant \frac{2}{\lambda}$ (IV). Zu zeigen ist, dass dann $|x_{n+1}| \geqslant \frac{2}{\lambda}$ gilt.

Per Definition gilt

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f_\lambda(x_n)}{f_\lambda'(x_n)} = x_n - \frac{\arctan(\lambda x_n)}{\frac{\lambda}{1+\lambda^2 x_n^2}} = x_n - \frac{\arctan(\lambda x_n)\,(1 + \lambda^2 x_n^2)}{\lambda}\,.$$

Nach (IV) ist $\lambda|x_n| \geqslant 2$. Wegen der Monotonie von arctan folgt $\arctan(\lambda|x_n|) \geqslant \arctan(2) \geqslant 1$ und damit

$$\left|\frac{\arctan(\lambda x_n)\,(1 + \lambda^2 x_n^2)}{\lambda}\right| = \arctan(\lambda|x_n|)\,\frac{(1 + \lambda^2 x_n^2)}{\lambda} \geqslant 1 \cdot \lambda x_n^2 = \underbrace{\lambda|x_n|}_{\geqslant 2}\,|x_n| \geqslant 2|x_n|\,.$$

Die umgekehrte Dreiecksungleichung liefert

$$|x_{n+1}| \geqslant \left|\frac{\arctan(\lambda x_n)\,(1 + \lambda^2 x_n^2)}{\lambda}\right| - |x_n| \geqslant 2|x_n| - |x_n| = |x_n| \overset{\text{(IV)}}{\geqslant} \frac{2}{\lambda}\,.$$

Daher ist $(x_n)_n$ keine Nullfolge, d.h. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert nicht gegen die Nullstelle von f_λ.

Dem vorigen Induktionsbeweis können wir entnehmen, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ divergiert: Wegen

$$|x_{n+1} - x_n| = \left|\frac{\arctan(\lambda x_n)\,(1+\lambda^2 x_n^2)}{\lambda}\right| \geqslant 2|x_n| \geqslant \frac{4}{\lambda} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ keine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ und somit divergent.

Aufgabe 10 (P)

Sei (x_0, y_0) der Schnittpunkt im ersten Quadranten der Geraden mit der Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$.
Für $x, y \geqslant 0$ gilt $x^2 - y^2 = 1$ genau dann, wenn $y = \sqrt{x^2-1}$ ist.
Das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(x_0, 0)$ und (x_0, y_0) hat den Flächeninhalt

$$F_D := \frac{1}{2}\, x_0\, y_0 = \frac{1}{2}\, x_0 \sqrt{x_0^2 - 1}\,.$$

Die gesuchte Fläche erhalten wir, indem wir hiervon die Fläche unter der Hyperbel

$$F_H := \int_1^{x_0} \sqrt{x^2-1}\, dx$$

subtrahieren. Partielle Integration führt auf

$$\begin{aligned}\int_1^{x_0} 1 \cdot \sqrt{x^2-1}\, dx &= \Big(x\sqrt{x^2-1}\Big)\Big|_{x=1}^{x_0} - \int_1^{x_0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\, dx \\ &= x_0\sqrt{x_0^2-1} - \int_1^{x_0} \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx - \int_1^{x_0} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx\,.\end{aligned}$$

Kürzen wir den Integranden im zweiten Summanden und addieren auf beiden Seiten $\int_1^{x_0} \sqrt{x^2-1}\, dx$, so bekommen wir

$$2\int_1^{x_0} \sqrt{x^2-1}\, dx = x_0\sqrt{x_0^2-1} - \int_1^{x_0} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx\,.$$

Wegen $\operatorname{Arcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ für $x > 1$ und $\operatorname{Arcosh}(1) = 0$ folgt

$$\int_1^{x_0} \sqrt{x^2-1}\, dx = \frac{1}{2}\, x_0\sqrt{x_0^2-1} - \frac{1}{2}\Big(\operatorname{Arcosh}(x)\Big)\Big|_{x=1}^{x_0} = \frac{1}{2}\, x_0\sqrt{x_0^2-1} - \frac{1}{2}\operatorname{Arcosh}(x_0)\,.$$

Also beträgt der gesuchte Flächeninhalt

$$F_D - F_H = \frac{1}{2}\, x_0\sqrt{x_0^2-1} - \left(\frac{1}{2}\, x_0\sqrt{x_0^2-1} - \frac{1}{2}\operatorname{Arcosh}(x_0)\right) = \frac{1}{2}\operatorname{Arcosh}(x_0)\,.$$