UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2008/09
20.01.2009

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

12. Übungsblatt

Aufgabe 1

Berechnen Sie Maximum und Minimum der Funktionen

a) $f\colon [-3,2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^4 - 4x^2 + 2\,;$

b) $g\colon [0,10] \to \mathbb{R},\ x \mapsto -6x + (|x-3|+2)^2\,.$

Aufgabe 2

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

a) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x\,(\ln x)^2}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{y\ln y}{\sinh y - y}\,dy$

c) $\displaystyle\int_0^\infty e^{sx}\cos(tx)\,dx \quad (s<0,\ t\in\mathbb{R})$ **d)** $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t}\ln(1+t)\,dt$

Aufgabe 3

Es sei $\lambda > 0$. Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ das uneigentliche Integral

$$I_n(\lambda) := \int_0^\infty x^n e^{-\lambda x}\,dx$$

konvergiert, und berechnen Sie $I_n(\lambda)$.

Hinweis: Drücken Sie $I_n(\lambda)$ mittels $I_n(1)$ aus und finden Sie mit Hilfe von partieller Integration eine Rekursionsformel, wie man $I_{n+1}(1)$ berechnen kann, wenn $I_n(1)$ bekannt ist.

Aufgabe 4

a) Untersuchen Sie die uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

i) $\displaystyle\int_{-1}^1 \ln|x|\,dx$ **ii)** $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$

b) Existieren die folgenden Grenzwerte?

i) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \ln|x|\,dx + \int_{\varepsilon}^1 \ln|x|\,dx\right)$ **ii)** $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x}\,dx\right)$

Aufgabe 5

a) Zeigen Sie das *Integralkriterium:* Ist die Funktion $f:[2,\infty)\to(0,\infty)$ monoton fallend, so sind äquivalent:

$$\int_2^\infty f(x)\,dx \text{ konvergiert} \quad\Longleftrightarrow\quad \sum_{n=2}^\infty f(n) \text{ konvergiert}\,.$$

— bitte wenden —

b) Untersuchen Sie, für welche $\alpha > 0$ die Reihe $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(\ln n)^{\alpha}}$ konvergiert.

Aufgabe 6

a) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_4(f;0)$ von $f\colon x \mapsto \ln(1+x)$ und zeigen Sie

$$0 \leqslant \ln(1+x) - T_4(f;0)(x) \leqslant \tfrac{1}{5}\,x^5 \qquad \text{für alle } x \geqslant 0\,.$$

b) Bestimmen Sie Zahlen a, b und c, für die gilt:

$$\bigl|\ln(2+x) - a - bx\bigr| \leqslant c\,x^2 \qquad \text{für alle } x \in [-1,1]\,.$$

c) Approximieren Sie die Funktion $f(x) := e^{-x} + \frac{1}{1+x}$ durch das Taylorpolynom $T_2(f;\frac{1}{2})$ und geben Sie eine Konstante $C > 0$ an so, dass für alle $x \in [0,1]$ gilt:

$$\bigl|f(x) - T_2(f;\tfrac{1}{2})(x)\bigr| \leqslant C\,\bigl|x - \tfrac{1}{2}\bigr|^3\,.$$

Aufgabe 7

a) Zeigen Sie, dass für alle $|x| < 1$ gilt

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}\,.$$

b) Bestimmen Sie durch gliedweises Differenzieren den Wert der Potenzreihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n^2 - n} \qquad \text{für } |x| < 1\,.$$

c) Die Funktion $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ ist definiert durch $f(x) := \ln(1-x^2)$. Berechnen Sie $f^{(20)}(0)$ sowie $f^{(31)}(0)$.

Aufgabe 8

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x) := x^2 + 2x - 3$. Berechnen Sie eine Potenzreihe, die in einer Umgebung von $x_0 = -1$ die Funktion $1/f$ darstellt. Bestimmen Sie den Konvergenzradius.

Aufgabe 9 (P)

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen.

a) $y' = \bigl(x + \frac{2}{x}\bigr)y$ **b)** $y' = 2xy + x$ **c)** $y' + y\cos x = \sin x\,\cos x$

Aufgabe 10 (P)

Bestimmen Sie sämtliche Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y' &= x\sqrt{1-y^2}\,, \\ y(0) &= y_0\,, \qquad \text{wobei } y_0 \in [-1,1]\,. \end{aligned}$$

Für welche y_0 existiert eine eindeutige Lösung?

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **3, 4, 5, 7 und 10**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.
Die mit **(P)** gekennzeichneten Aufgaben beziehen sich auf den Stoff aus den Ergänzungen zur HM I für Studierende der Physik.