UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2008/09

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 14. Übungsblatt

Aufgabe 1

Mittels Zeilenumformungen bringen wir A auf Zeilennormalform; die Zeilen werden dabei jeweils mit Z_1, Z_2 und Z_3 bezeichnet:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{tauschen}]{\text{Zeilen}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to -\frac{1}{2}Z_2]{Z_1 \to -\frac{1}{2}Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - 4Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -6 & 6 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + 6Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to -\frac{1}{3}Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to Z_2 + 2Z_3]{Z_1 \to Z_1 + \frac{7}{2}Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In der Zeilennormalform von A gibt es drei nichtverschwindende Zeilen, also hat A Rang 3.
Nun zur Matrix B:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1 \leftrightarrow Z_3]{Z_3 \to \frac{1}{2}Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(j=2,3,4)]{Z_j \to Z_j - Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & \alpha-2 & \beta-2 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to -\frac{1}{2}Z_2]{Z_3 \to Z_3 - 2Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & \alpha-2 & \beta-2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[Z_3 \to \frac{1}{2}Z_3]{Z_4 \to Z_4 + Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-10 & \beta-4 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 \to Z_1 - Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-10 & \beta-4 \end{pmatrix} =: \widetilde{B}$$

Fall 1: $\alpha = 10$ und $\beta = 4$. In diesem Fall steht die Zeilennormalform von B bereits da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da hier genau 3 nichtverschwindende Zeilen existieren, hat B in diesem Fall Rang 3.
Fall 2: $\alpha = 10$ und $\beta \neq 4$. Dann erhalten wir

$$\widetilde{B} \xrightarrow{Z_4 \to (\beta-4)^{-1}Z_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 + Z_4]{Z_1 \to Z_1 - 3Z_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und lesen ab: In diesem Fall hat B Rang 4.
Fall 3: $\alpha \neq 10$. Dann setzen wir $\delta := (\beta - 4)/(\alpha - 10)$ und erhalten

$$\widetilde{B} \xrightarrow{Z_4 \to (\alpha-10)^{-1} Z_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 + 4Z_4]{Z_1 \to Z_1 - 6Z_4,\ Z_2 \to Z_2 + Z_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 - 6\delta \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 + 4\delta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \delta \end{pmatrix}$$

Die Matrix B besitzt somit auch in diesem Fall Rang 4.

Aufgabe 2

a) Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_4 &= 3 \\ x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_5 &= 2 \end{aligned}$$

liegt bereits in Zeilennormalform vor:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

(Stellen wir uns hier das Endergebnis beim Lösungsalgorithmus vor, so wären hier womöglich noch Nullzeilen, die aber einfach ignoriert werden dürfen). Diese Treppe verläuft nicht regelmäßig. Nun verwenden wir den (-1)-Ergänzungstrick. In jeder Spalte der Koeffizientenmatrix sollte eine neue Stufe anfangen! Dies erzwingen wir, indem wir zwei Zeilen der Form $0 \ldots 0\ \ -1\ \ 0 \ldots 0$ einfügen:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Jetzt können wir die Lösung ablesen: die beiden *Spalten* mit den neu hinzugekommenen Stufen (an den -1-en erkennbar) sind eine Basis des homogenen Lösungsraums, und die letzte *Spalte* ist eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung! Gemäß Folgerung (1) in 14.11 ergibt sich für die allgemeine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Das Einfügen jener -1-Zeilen ist nichts anderes als das Setzen von freien Parametern. Betrachten wir das ursprüngliche Gleichungssystem mit Variablen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_4 &= 3 \\ x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_5 &= 2\,, \end{aligned}$$

setzen zwei Parameter (aber mit Minuszeichen!)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_4 &= 3 \\ x_2 &= -\lambda \\ x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_4 &= -\mu \\ x_5 &= 2\,, \end{aligned}$$

lassen in jeder Zeile nur eine Variable stehen

$$\begin{aligned} x_1 &= 3+\lambda+2\mu \\ x_2 &= -\lambda \\ x_3 &= 1+4\mu \\ x_4 &= -\mu \\ x_5 &= 2 \end{aligned}$$

und schreiben vektoriell

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

b) Um das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & - & 2\,x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 = & 0 \\ 4\,x_1 & - & 8\,x_2 & + & 3\,x_3 & - & 3\,x_4 & + & x_5 = & 2 \\ -2\,x_1 & + & 4\,x_2 & - & 2\,x_3 & - & x_4 & + & 4\,x_5 = & -3 \\ x_1 & - & 2\,x_2 & & & - & 3\,x_4 & + & 4\,x_5 = & -1 \end{array}$$

zu lösen, bestimmen wir die Zeilennormalform der zugehörigen erweiterten Matrix

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 3 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & -3 & 4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_4 \to Z_4 - Z_1]{\substack{Z_2 \to Z_2 - 4Z_1 \\ Z_3 \to Z_3 + 2Z_1}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_4 \to Z_4 - Z_2]{\substack{Z_2 \to -Z_2 \\ Z_3 \to -\frac{1}{3} Z_3}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_4 \to Z_4 + 3Z_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_2 \to Z_2 + Z_3]{Z_1 \to Z_1 - Z_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

und verwenden den (-1)-Ergänzungstrick, d.h. wir lassen Nullzeilen in der Zeilennormalform weg und ergänzen Zeilen mit -1 und sonst Nullen, so dass auf der Diagonalen nur ± 1 steht:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Nun können wir die allgemeine Lösung $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$ des Gleichungssystems ablesen:

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 3

Wir bringen die erweiterte Matrix $(A|y)$ durch Zeilenumformungen auf Zeilennormalform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha-1 & \beta+2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha & \beta & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - \alpha Z_2]{Z_1 \to Z_1 + Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2+\alpha & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \beta-\alpha^2 & 2-\alpha \end{array}\right) =: (*)$$

1. Fall: $\beta \neq \alpha^2$. Dann setzen wir zur Abkürzung $\gamma := (2-\alpha)/(\beta-\alpha^2)$ und erhalten

$$(*) \xrightarrow{Z_3 \to (\beta-\alpha^2)^{-1} Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2+\alpha & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{array}\right) \xrightarrow[Z_2 \to Z_2 - \alpha Z_3]{Z_1 \to Z_1 - (2+\alpha) Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2-(2+\alpha)\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 1-\alpha\gamma \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{array}\right)$$

Man sieht: In diesem Fall ist das Gleichungssystem $Ax = y$ eindeutig lösbar; die Lösung $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3$ ist gegeben durch $x_1 = 2 - (2+\alpha)\gamma$, $x_2 = 1 - \alpha\gamma$ und $x_3 = \gamma$.

2. Fall: $\beta = \alpha^2$ und $\alpha \neq 2$. Dann ergibt sich

$$(*) \xrightarrow{Z_3 \to (2-\alpha)^{-1} Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2+\alpha & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Der Rang der erweiterten Matrix ist größer als der von A. Folglich besitzt das lineare Gleichungssystem $Ax = y$ in diesem Fall keine Lösung.

3. Fall: $\beta = \alpha^2$ und $\alpha = 2$. Dann steht die Zeilennormalform bereits da:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Der Rang der erweiterten Matrix und der Rang von A stimmen überein, das Gleichungssystem ist also lösbar. Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung $Ax = y$ ist

$$x_p = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alle Lösungen des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$ erhält man, indem man $x_3 = \lambda$ setzt [oder den (-1)-Ergänzungstrick verwendet]:

$$x_h = \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\lambda \in \mathbb{K}).$$

Die allgemeine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $Ax = y$ ist folglich

$$x = x_p + x_h = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\lambda \in \mathbb{K}).$$

Aufgabe 4

Definiere

$$v_1 := \begin{pmatrix}1\\ i\\ 0\\ 2\end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix}0\\ -1-i\\ 1+i\\ 0\end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix}0\\ -i\\ -c-i\\ c^2+2ci\end{pmatrix}, \quad v_4 := \begin{pmatrix}i\\ i-1+c\\ -c-i\\ 2i\end{pmatrix}.$$

Gesucht sind alle $c \in \mathbb{C}$, für welche das lineare Gleichungssystem $\sum_{j=1}^4 x_j v_j = y$ eine Lösung $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ hat. Wir wenden Zeilenumformungen auf die erweiterte Matrix an:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & i & 1\\ i & -1-i & -i & i-1+c & 5i-1\\ 0 & 1+i & -c-i & -c-i & 1-i\\ 2 & 0 & c^2+2ci & 2i & c^2 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_4 \to Z_4 - 2Z_1]{Z_2 \to Z_2 - iZ_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & i & 1\\ 0 & -1-i & -i & i+c & 4i-1\\ 0 & 1+i & -c-i & -c-i & 1-i\\ 0 & 0 & c^2+2ci & 0 & c^2-2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + Z_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & i & 1\\ 0 & -1-i & -i & i+c & 4i-1\\ 0 & 0 & -c-2i & 0 & 3i\\ 0 & 0 & c^2+2ci & 0 & c^2-2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_4 \to Z_4 + cZ_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & i & 1\\ 0 & -1-i & -i & i+c & 4i-1\\ 0 & 0 & -c-2i & 0 & 3i\\ 0 & 0 & 0 & 0 & c^2+3ci-2 \end{array}\right)$$

Dieses lineare Gleichungssystem ist unlösbar für $0 \neq c^2 + 3ci - 2 = (c+i)(c+2i)$, also für $c \in \mathbb{C} \setminus \{-2i, -i\}$. Wegen der dritten Zeile ist die Lösungsmenge auch für $c = -2i$ leer. Nur im Fall $c = -i$ ist das lineare Gleichungssystem lösbar. Fazit: Genau für $c = -i$ gilt $y \in U$.

Aufgabe 5

a) Wir untersuchen, für welche $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ man $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 = 0$ erhält. Es gilt

$$\begin{aligned} &\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 \\ &\quad = \lambda_1\big((\alpha-1)a_2 + 2a_3\big) + \lambda_2\big(2a_1 + (2\alpha-3)a_2 + 4a_3\big) + \lambda_3\big(a_1 + (\alpha-1)a_2 + a_3\big) \\ &\quad = \big(2\lambda_2 + \lambda_3\big)a_1 + \big((\alpha-1)\lambda_1 + (2\alpha-3)\lambda_2 + (\alpha-1)\lambda_3\big)a_2 + \big(2\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3\big)a_3\,. \end{aligned}$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit von a_1, a_2, a_3 wird dies genau dann $= 0$, wenn die Koeffizienten der a_1, a_2, a_3 verschwinden. Folglich gilt $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 = 0$ genau dann, wenn λ_1, λ_2 und λ_3 das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ (\alpha-1)\lambda_1 + (2\alpha-3)\lambda_2 + (\alpha-1)\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

lösen. Die Matrix dieses homogenen linearen Gleichungssystems formen wir um:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1\\ \alpha-1 & 2\alpha-3 & \alpha-1\\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Zeilen tauschen}]{Z_3 \to \frac{1}{2}Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2}\\ 0 & 2 & 1\\ \alpha-1 & 2\alpha-3 & \alpha-1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[Z_1 \to Z_1 - Z_2,\ Z_2 \to \frac{1}{2}Z_2]{Z_3 \to Z_3 - (\alpha-1)Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & -1 & \frac{1}{2}(\alpha-1) \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\alpha \end{pmatrix}$$

Man sieht: Die Matrix hat Rang 3 genau dann, wenn $\alpha \neq 0$ ist. Obiges Gleichungssystem besitzt also genau im Fall $\alpha \neq 0$ nur die triviale Lösung. Folglich sind die Vektoren b_1, b_2, b_3 genau dann linear unabhängig, wenn $\alpha \neq 0$ ist.

b) Sei $x := a_1 + \beta a_2 + 2a_3$. Wir suchen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 = x$. Wegen

$$\begin{aligned}\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 &= \lambda_1(-a_2 + 2a_3) + \lambda_2(2a_1 - 3a_2 + 4a_3) + \lambda_3(a_1 - a_2 + a_3)\\ &= (2\lambda_2 + \lambda_3)a_1 + (-\lambda_1 - 3\lambda_2 - \lambda_3)a_2 + (2\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3)a_3\end{aligned}$$

und der linearen Unabhängigkeit von a_1, a_2, a_3 läuft dies darauf hinaus, eine Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 2 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen. Wir formen die erweiterte Matrix dieses Gleichungssystems um:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -1 & \beta \\ 2 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_1 \leftrightarrow Z_2]{Z_3 \to Z_3 + 2Z_2,\ Z_2 \to -Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -\beta \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2+2\beta \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_2 \to \frac{1}{2}Z_2]{Z_3 \to Z_3 + Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -\beta \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 3+2\beta \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \to Z_1 - 3Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\beta - \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 3+2\beta \end{array}\right)$$

Das System ist nur für $\beta = -\frac{3}{2}$ lösbar. Die Zeilennormalform lautet dann

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Das Gleichungssystem hat also keine eindeutige Lösung; die allgemeine Lösung lautet

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (\eta \in \mathbb{R} \text{ und } \mu = -\tfrac{1}{2}\eta).$$

Fazit: Die Darstellung des Vektors x gelingt genau dann, wenn $\beta = -\frac{3}{2}$ ist. Es gilt dann

$$x = \mu b_1 + (\tfrac{1}{2} - \mu) b_2 + 2\mu b_3 \qquad (\mu \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 6

a) Diese Abbildung ist linear, denn für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ gilt

$$\begin{aligned} f(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 \\ \lambda x_2 + y_2 \end{pmatrix}) &= \begin{pmatrix} 7(\lambda x_2 + y_2) \\ i(\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2) \\ 3(\lambda x_1 + y_1) - 4i(\lambda x_2 + y_2) \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} 7x_2 \\ ix_1 + x_2 \\ 3x_1 - 4ix_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7y_2 \\ iy_1 + y_2 \\ 3y_1 - 4iy_2 \end{pmatrix} = \lambda f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}). \end{aligned}$$

b) Die Abbildung ist nicht linear, denn es gilt $f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$. Für eine lineare Abbildung ϕ muss jedoch stets $\phi(\vec{0}) = \phi(0 \cdot \vec{0}) = 0 \cdot \phi(\vec{0}) = \vec{0}$ gelten.

c) Auch dieses f ist nicht linear, da wieder $f(\vec{0}) \neq 0$ gilt. Man beachte aber: Auch

$$g(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) := xy$$

wäre nicht linear (trotz $g(\vec{0}) = 0$), denn es gilt $g(e_1 + e_2) = 1 \neq 0 + 0 = g(e_1) + g(e_2)$.

d) Entgegen dem ersten Anschein ist f linear. Dies folgt aus Beispiel (1) in 14.15, denn

$$\begin{aligned} f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) &= (x-2i)(y+3) - (x+1)(y-6i) = xy + 3x - 2iy - 6i - (xy - 6ix + y - 6i) \\ &= (3+6i)x - (1+2i)y = \underbrace{\begin{pmatrix} 2+6i & -1-2i \end{pmatrix}}_{=:A \in \mathbb{C}^{1\times 2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Aufgabe 7

a) Wegen $\phi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ mit $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist ϕ nach Beispiel (1) in 14.15 linear. Es gilt

$$\text{Kern } \phi = \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, \phi(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, Ax = 0\} = \text{Kern } A = \text{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}\,.$$

Letzteres liest man unter Verwendung des (-1)-Ergänzungstricks der Zeilennormalform $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ von A ab. Gemäß Definition ist

$$\text{Bild } \phi = \{\phi(x) \,:\, x \in \mathbb{R}^2\} = \{Ax \,:\, x \in \mathbb{R}^2\} = \text{Bild } A = \text{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}\,,$$

weil Bild A der lineare Aufspann der Spalten von A ist.

b) Zunächst bringen wir A mittels Zeilenumformungen auf Zeilennormalform:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1 \to -\frac{1}{3}Z_1]{\substack{Z_2 \to Z_2 + \frac{1}{3}Z_1 \\ Z_3 \to -\frac{1}{2}Z_3 + \frac{1}{3}Z_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & -1/2 & -1/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + \frac{1}{2}Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe des (-1)-Ergänzungstricks lesen wir ab:

$$\text{Kern } A = \text{lin}\{\begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ -1 \end{pmatrix}\} = \text{lin}\{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\}.$$

Folglich ist $\{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\}$ eine Basis von Kern A und es gilt dim Kern $A = 1$. Die Dimensionsformel liefert dim Bild $A = 3 - \text{dim Kern } A = 3 - 1 = 2$. Da die beiden Vektoren $Ae_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, Ae_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in$ Bild A linear unabhängig sind, bilden diese eine Basis von Bild A, also

$$\text{Bild } A = \text{lin}\{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

Aufgabe 8

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^n kx_k$ eine Abbildung.

a) Aufgrund von

$$\phi(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{mit } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times n}$$

ist $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nach Beispiel (1) in 14.15 linear.

Alternativ kann man die Linearität von ϕ auch wie folgt begründen:

Für beliebige $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\phi(\alpha x + y) = \phi(\begin{pmatrix} \alpha x_1 + y_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n + y_n \end{pmatrix}) = \sum_{k=1}^n k(\alpha x_k + y_k) = \alpha \sum_{k=1}^n kx_k + \sum_{k=1}^n ky_k = \alpha\phi(x) + \phi(y)\,.$$

b) Wegen $\phi(\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}) = 1 \cdot a = a$ für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt Bild $\phi = \mathbb{R}$, also ist $\{1\}$ eine Basis von Bild $A =$ Bild ϕ. Insbesondere ist dim Bild $A = 1$.

Nun überlegen wir uns, wie viele Basisvektoren Kern $\phi =$ Kern A aufspannen. Die Dimensionsformel liefert $n = \dim \text{Bild } A + \dim \text{Kern } A$, folglich ist dim Kern $A = n - 1$.

Zur Bestimmung von Kern $A =$ Kern ϕ verwenden wir den (-1)-Ergänzungstrick:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & \cdots & n \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Jeder der $n - 1$ Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \dots,\ \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

ist in Kern ϕ enthalten. Da die angegebenen $n - 1$ Vektoren linear unabhängig sind, bilden diese eine Basis von Kern ϕ:

$$\text{Kern } \phi = \text{lin}\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \dots,\ \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

c) Wegen ϕ injektiv $\iff$ Kern $\phi = \{0\}$ $\iff$ dim Kern $\phi = 0$ ist ϕ genau für $n = 1$ injektiv.

Aufgabe 9 (P)

Für eine stetige Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definiere $\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|\,dt$.

a) Um zu zeigen, dass $\|\cdot\|_1$ eine Norm auf $C([0,1])$ ist, müssen wir (N1), (N2), (N3) aus Definition E11.3 überprüfen:

(N1) Zu zeigen: Gilt $\int_0^1 |f(t)|\,dt = 0$ für eine stetige Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, so ist $f(t) = 0$ für alle $t \in [0,1]$. Dies haben wir bereits in Aufgabe 8 a) vom 9. Übungsblatt gesehen.

(N2) Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ und jede stetige Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ gilt

$$\|\alpha f\|_1 = \int_0^1 |\alpha f(t)|\,dt = \int_0^1 |\alpha| \cdot |f(t)|\,dt = |\alpha| \int_0^1 |f(t)|\,dt = |\alpha|\|f\|_1\,.$$

(N3) Für beliebige stetige Funktionen $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\|f+g\|_1 &= \int_0^1 |(f+g)(t)|\,dt = \int_0^1 |f(t)+g(t)|\,dt \leqslant \int_0^1 |f(t)| + |g(t)|\,dt \\ &= \int_0^1 |f(t)|\,dt + \int_0^1 |g(t)|\,dt = \|f\|_1 + \|g\|_1\,.\end{aligned}$$

b) Für $n \in \mathbb{N}$ definiere $f_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t \in [0,1/2) \\ n(t-1/2), & t \in [1/2, 1/2+1/n) \\ 1, & t \in [1/2+1/n, 1] \end{cases}$, $t \in [0,1]$.

Dann ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen. Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n > m$ gilt

$$\begin{aligned}\|f_n - f_m\|_1 &= \int_0^1 |(f_n + f_m)(t)|\,dt = \int_0^1 |f_n(t) - f_m(t)|\,dt \\ &= \int_0^{1/2} \underbrace{|f_n(t) - f_m(t)|}_{=0-0=0}\,dt + \int_{1/2}^{1/2+1/m} \underbrace{|f_n(t) - f_m(t)|}_{\leqslant |f_n(t)|+|f_m(t)| \leqslant 1+1=2}\,dt + \int_{1/2+1/m}^1 \underbrace{|f_n(t) - f_m(t)|}_{1-1=0}\,dt \\ &\leqslant 2\big(1/2 + 1/m - 1/2\big) = 2/m\,.\end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $m_0 \in \mathbb{N}$ mit $2/\varepsilon < m_0$ und für alle $n > m \geqslant m_0$ ergibt sich $\|f_n - f_m\|_1 \leqslant 2/m \leqslant 2/m_0 < \varepsilon$. Also ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine $\|\cdot\|_1$-Cauchyfolge.

Annahme: Es existiert $f \in C([0,1])$ mit $\|f_n - f\|_1 \to 0$ $(n \to \infty)$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}\|f_n - f\|_1 &= \int_0^1 |f_n(t) - f(t)|\,dt \\ &= \int_0^{1/2} |f(t)|\,dt + \int_{1/2}^{1/2+1/n} |f_n(t) - f(t)|\,dt + \int_{1/2+1/n}^1 |1 - f(t)|\,dt\,.\end{aligned}$$

Wegen $\|f_n - f\|_1 \to 0$ $(n \to \infty)$ und $1/2 + 1/n \to 1/2$ $(n \to \infty)$ folgt

$$\int_0^{1/2} |f(t)|\,dt = 0 \quad \text{und} \quad \int_{1/2}^1 |1 - f(t)|\,dt = 0\,.$$

Gemäß Aufgabe 8 a) vom 9. Übungsblatt muss die stetige Funktion f

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 1/2 \\ 1, & 1/2 < t < 1 \end{cases}$$

erfüllen. Dies widerspricht der Annahme, dass f stetig ist.

Fazit: Es gibt eine $\|\cdot\|_1$-Cauchyfolge in $C([0,1])$, die keinen Grenzwert in $C([0,1])$ hat, d.h. $(C([0,1]), \|\cdot\|_1)$ ist nicht vollständig.

Aufgabe 10 (P)

Vorbemerkung: Jede Norm $\|\cdot\|$ auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V erfüllt die umgekehrte Dreiecksungleichung:

$$\big|\|u\| - \|v\|\big| \leqslant \|u - v\| \qquad \text{für alle } u, v \in V\,.$$

Beweis (wortwörtlich wie beim Betrag in 4.3 (6)): Seien $u, v \in V$. Dann gilt

$$\|u\| = \|(u - v) + v\| \leqslant \|u - v\| + \|v\| \quad \Longleftrightarrow \quad \|u\| - \|v\| \leqslant \|u - v\|$$

und analog

$$\|v\| = \|(v - u) + u\| \leqslant \|v - u\| + \|u\| = \|u - v\| + \|u\| \quad \Longleftrightarrow \quad \|v\| - \|u\| \leqslant \|u - v\|\,.$$

Zusammen ergibt sich die behauptete Ungleichung.

Sei $(H, (\cdot|\cdot))$ ein Prä-Hilbertraum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in H und $x \in H$. Behauptung:

$$\|x_n - x\| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \|x_n\| \xrightarrow{n\to\infty} \|x\| \ \text{ und } \ (x_n|y) \xrightarrow{n\to\infty} (x|y) \text{ für jedes } y \in H$$

Beweis:
"$\Rightarrow$": Es gelte $\|x_n - x\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Die umgekehrte Dreiecksungleichung liefert

$$\big|\|x_n\| - \|x\|\big| \leqslant \|x_n - x\| \to 0\,, \qquad \text{also} \quad \|x_n\| \to \|x\| \quad \text{für } n \to \infty\,.$$

Für jedes $y \in H$ gilt nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\big|(x_n|y) - (x|y)\big| = \big|(x_n - x|y)\big| \leqslant \underbrace{\|x_n - x\|}_{\to 0} \cdot \|y\| \to 0\,, \qquad \text{also} \quad (x_n|y) \to (x|y) \quad \text{für } n \to \infty\,.$$

"$\Leftarrow$": Nun gelte $\|x_n\| \xrightarrow{n\to\infty} \|x\|$ und $(x_n|y) \xrightarrow{n\to\infty} (x|y)$ für alle $y \in H$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned}
\|x_n - x\|^2 &= (x_n - x|x_n - x) = (x_n|x_n - x) - (x|x_n - x) = (x_n|x_n) - (x_n|x) - (x|x_n) + (x|x) \\
&= \|x_n\|^2 - \big((x_n|x) + \overline{(x_n|x)}\big) + \|x\|^2 = \|x_n\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(x_n|x) + \|x\|^2 \\
&\xrightarrow{n\to\infty} \|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\underbrace{(x|x)}_{=\|x\|^2 \in \mathbb{R}} + \|x\|^2 = 0\,.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt $\|x_n - x\| \to 0$ für $n \to \infty$.