UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2009/10

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt unter Verwendung von $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2 + n - n = n^2.$$

b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} j \cdot (n-k) = \left(\sum_{j=1}^{n} j\right)\left(\sum_{k=1}^{n}(n-k)\right) \overset{l:=n-k}{=} \frac{1}{2}n(n+1) \sum_{l=0}^{n-1} l$$
$$= \frac{1}{2}n(n+1)\,\frac{1}{2}(n-1)n = \frac{1}{4}n^2(n^2-1).$$

c) Es sind $\sum_{k=2}^{2} \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{3}$ und $\sum_{k=2}^{3} \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{11}{24}$. Für $n \geqslant 4$ erhalten wir laut Hinweis

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\Big(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\Big) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{k+1} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$
$$\overset{j:=k-2}{=} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \sum_{j=2}^{n-2}\frac{1}{j+1} - \sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{k+1} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2}\,.$$

d) Für $n \geqslant 2$ ist

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=2}^{n}\frac{(k+1)(k-1)}{k^2} = \frac{\prod_{k=2}^{n}(k+1)\cdot\prod_{k=2}^{n}(k-1)}{\prod_{k=2}^{n}k^2}$$
$$= \frac{\prod_{j=3}^{n+1} j \cdot \prod_{m=1}^{n-1} m}{(\prod_{k=2}^{n} k)^2} = \frac{\frac{1}{2}(n+1)!\cdot(n-1)!}{(n!)^2} = \frac{\frac{1}{2}(n+1)\cdot 1}{n} = \frac{n+1}{2n}\,.$$

Alternativ: Definieren wir für $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ die Zahlen $a_n := \prod_{k=2}^{n}(1 - \frac{1}{k^2})$, so gilt

$$a_2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \qquad a_3 = a_2 \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9} = \frac{2}{3},$$
$$a_4 = a_3 \cdot \frac{15}{16} = \frac{5}{8}, \qquad a_5 = a_4 \cdot \frac{24}{25} = \frac{3}{5}.$$

Die Zahlen liegen alle in der Nähe von $\frac{1}{2}$, darum betrachten wir $a_n - \frac{1}{2}$. Wir erhalten

$$a_2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \qquad a_3 - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}, \qquad a_4 - \frac{1}{2} = \frac{1}{8}, \qquad a_5 - \frac{1}{2} = \frac{1}{10}.$$

Wir vermuten, dass $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} = \frac{n+1}{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gilt, und zeigen dies mit vollständiger Induktion.

Induktionsanfang: Für $n = 2$ haben wir die Formel gerade schon überprüft.

Induktionsschluss: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$. Es gelte $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} = \frac{n+1}{2n}$ (IV). Dann folgt

$$\begin{aligned} a_{n+1} = a_n \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) &\overset{\text{IV}}{=} \frac{n+1}{2n} \cdot \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - 1}{2n(n+1)} \\ &= \frac{n^2 + 2n + 1 - 1}{2n(n+1)} = \frac{n^2 + 2n}{2n(n+1)} = \frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{(n+1)+1}{2(n+1)}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

a) Hier liegt eine Teleskopsumme vor. Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! &= \sum_{k=1}^{n} (k+1-1) \cdot k! = \sum_{k=1}^{n} \big((k+1)! - k!\big) = \sum_{k=1}^{n} (k+1)! - \sum_{k=1}^{n} k! \\ &= (n+1)! + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)! - (1 + \sum_{k=2}^{n} k!) = (n+1)! - 1. \end{aligned}$$

b) Beweis durch vollständige Induktion:

IA: Wegen $\sum_{k=1}^{2} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ und $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{1+k} = \frac{1}{2}$ ist $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ für $n = 1$ richtig.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$. Für dieses n gelte $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ (IV). Dann folgt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2(n+1)} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \overset{\text{IV}}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{n+(n+1)} - \frac{1}{2n+2} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k} - \frac{1}{2n+2} \overset{j:=k-1}{=} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{n+(1+j)} - \frac{1}{2n+2} \\ &= \frac{1}{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(n+1)+j} - \frac{1}{2n+2} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(n+1)+j} + \frac{2-1}{2n+2} = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{(n+1)+j}. \end{aligned}$$

c) Wir verwenden wieder vollständige Induktion.

IA: Für $n = 1$ hat die Summe genau einen Summanden und ergibt 1; dies ist größer als $\frac{1}{2}$.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$. Für dieses n sei $\sum_{k=1}^{2^n - 1} \frac{1}{k} > \frac{n}{2}$ erfüllt (IV). Dann folgt

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^n - 1} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} \overset{\text{IV}}{>} \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{n}{2} + \frac{2^{n+1} - 1 - 2^n + 1}{2^{n+1}} = \frac{n+1}{2}.$$

(Bei der Abschätzung wurde außer IV noch benutzt, dass $2^{n+1} > k$, also $1/k > 1/2^{n+1}$, für alle $k \in \{2^n, \dots, 2^{n+1} - 1\}$ gilt.)

d) IA: Für $n = 1$ stimmt die behauptete Aussage, denn $6^1 - 5 \cdot 1 + 4 = 5$ ist durch 5 teilbar.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte die Behauptung, sei also $6^n - 5n + 4$ durch 5 teilbar, etwa $6^n - 5n + 4 = 5l$ für ein $l \in \mathbb{Z}$. (IV)

Zu zeigen ist, dass dann auch $6^{n+1} - 5(n+1) + 4$ durch 5 teilbar ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} 6^{n+1} - 5(n+1) + 4 &= 6 \cdot 6^n - 5n - 5 + 4 = 6\big(6^n - 5n + 4\big) + 25n - 25 \\ &\overset{\text{IV}}{=} 6 \cdot 5l + 25n - 25 = (\underbrace{6 \cdot l + 5n - 5}_{\in \mathbb{Z}}) \cdot 5. \end{aligned}$$

e) IA: Für $n = 5$ gilt $2^n = 2^5 = 32$ und $n^2 = 5^2 = 25$. Also ist die behauptete Ungleichung für $n = 5$ wahr.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 5$ beliebig. Für dieses n gelte $2^n > n^2$ (IV). Dann folgt

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \overset{\text{IV}}{>} 2 \cdot n^2.$$

Zu zeigen verbleibt: $2n^2 \geqslant (n+1)^2 \;\Leftrightarrow\; 2n^2 \geqslant n^2 + 2n + 1 \;\Leftrightarrow\; n^2 \geqslant 2n + 1$. Die Gültigkeit der letzten Ungleichung sehen wir folgendermaßen

$$n \geqslant 5 \;\Rightarrow\; n \geqslant 3 \;\Rightarrow\; n^2 \geqslant 3n \;\Rightarrow\; n^2 \geqslant 2n + n \;\Rightarrow\; n^2 \geqslant 2n + 1\,.$$

f) IA: Für $n = 2$ ist $\prod_{k=1}^{2-1}(1 + \frac{1}{k})^k = (1 + \frac{1}{1})^1 = 2 = \frac{2^2}{2!}$.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$ beliebig. Für dieses n gelte $\prod_{k=1}^{n-1}(1 + \frac{1}{k})^k = \frac{n^n}{n!}$ (IV). Dann gilt:

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{(n+1)-1}\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k &= \left(\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \overset{\text{IV}}{=} \frac{n^n}{n!} \cdot \left(\frac{n}{n} + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \frac{n^n}{n!} \cdot \frac{(n+1)^n}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n!} \cdot \frac{n+1}{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Sei $n \in \mathbb{N}$. Zuerst berechnen wir den Wert der Teleskopsumme

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2 - (k-1)^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n}(k-1)^2 = n^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - \sum_{k=1}^{n}(k-1)^2 \overset{(*)}{=} n^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - \sum_{j=0}^{n-1} j^2 = n^2.$$

In $(*)$ führten wir in der zweiten Summe die Indexverschiebung $j := k - 1$ durch. Andererseits ist

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2 - (k-1)^2) = \sum_{k=1}^{n}(k^2 - (k^2 - 2k + 1)) = \sum_{k=1}^{n}(2k - 1) = 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = 2\sum_{k=1}^{n} k - n$$

bzw. äquivalent hierzu

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}\left(n + \sum_{k=1}^{n}(k^2 - (k-1)^2)\right).$$

Einsetzen von $\sum_{k=1}^{n}(k^2 - (k-1)^2) = n^2$ ergibt

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}(n + n^2) = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Zur Berechnung von $\sum_{k=1}^{n} k^2$ betrachten wir die Teleskopsumme $\sum_{k=1}^{n}(k^3 - (k-1)^3)$. Ähnlich wie zuvor sehen wir $\sum_{k=1}^{n}(k^3 - (k-1)^3) = n^3$. Außerdem gilt

$$\sum_{k=1}^{n}(k^3 - (k-1)^3) = \sum_{k=1}^{n}(k^3 - (k^3 - 3k^2 + 3k - 1)) = \sum_{k=1}^{n}(3k^2 - 3k + 1) = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k + n$$

und damit

$$\begin{aligned}3\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \sum_{k=1}^{n}(k^3 - (k-1)^3) + 3\sum_{k=1}^{n} k - n = n^3 + 3 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) - n \\ &= \frac{1}{2}n(2n^2 + 3n + 3 - 2) = \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1).\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Aufgabe 4

Wir beginnen damit, einige a_n zu berechnen:

$$a_3 = \frac{(3-1)^2(3-2)^2}{3^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{9}, \qquad a_4 = \frac{3^2 2^2}{4^2} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

Es scheint $a_n = 1/n^2$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ zu gelten. Wir bestätigen dies mit vollständiger Induktion:
Induktionsanfang: Für $n = 1$ und $n = 2$ stimmt dies offenbar.
Induktionsschluss: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$. Für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$ gelte $a_k = 1/k^2$ (IV).
(Man beachte: Als Induktionsvoraussetzung reicht hier nicht, dass die Formel nur für n gilt, sondern auch für $n-1$, weil man im Induktionsschluss auf Informationen über a_n und a_{n-1} zurückgreift.)
Dann folgt

$$a_{n+1} = \frac{n^2(n-1)^2}{(n+1)^2} \cdot a_n \cdot a_{n-1} = \frac{n^2(n-1)^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{(n-1)^2} = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Aufgabe 5

a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig. Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.
Wir erbringen den Beweis mittels vollständiger Induktion nach $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
IA: Für $n = 0$ steht links $(a+b)^0 = 1$ und rechts

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1.$$

Also ist die Formel für $n = 0$ richtig. (Man beachte $\binom{0}{0} = 1$ und $0^0 = 1$.)
IS: Sei $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ beliebig. Es gelte $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ (IV). Dann folgt

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \overset{\text{IV}}{=} (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n+1-k} + b^{n+1}
\end{aligned}$$

und mit $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{n+1-k}{n+1-k} + \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} \frac{k}{k} = \frac{(n+1-k+k)n!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
&= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

In $(*)$ führten wir bei der ersten Summe die Indexverschiebung $j := k+1$ durch.

b) **i)** Es ist

$$\sum_{j=0}^{4}\binom{4}{j}(-1)^j 3^{j+1} = 3\sum_{j=0}^{4}\binom{4}{j}(-3)^j 1^{4-j} = 3(-3+1)^4 = 3\cdot 16 = 48.$$

ii) Sei $n \in \mathbb{N}$. Nach Definition der Binomialkoeffizienten gilt für jedes $k \in \{1,2,\dots,n\}$

$$k\binom{n}{k} = k\cdot\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} = n\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,((n-1)-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Daher liefert der binomische Lehrsatz

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} \overset{j:=k-1}{=} n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\cdot 1^j\cdot 1^{(n-1)-j} = n\cdot(1+1)^{n-1} = n\cdot 2^{n-1}.$$

iii) Mit der gleichen Umformung wie in **ii)** erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k n\binom{n-1}{k-1} = -n\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}\\ &\overset{j:=k-1}{=} -n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\cdot(-1)^j\cdot 1^{(n-1)-j}\\ &= -n(1-1)^{n-1} = -n\cdot 0^{n-1} = \begin{cases}-1 & \text{für } n=1\,,\\ 0 & \text{für } n>1\,.\end{cases}\end{aligned}$$

Aufgabe 6

a) Es gilt: $z^3 = (3-i)^3 = (3-i)(9-6i+i^2) = (3-i)(8-6i) = 24-18i-8i+6i^2 = 18-26i$. Folglich hat z^3 den Realteil 18 und den Imaginärteil -26. Ferner ist $|z^3| = \sqrt{18^2+(-26)^2} = \sqrt{1000} = 10\sqrt{10}$. Alternativ kann man $|z^3|$ auch berechnen, ohne z^3 bestimmt zu haben: $|z^3| = |z|^3 = \sqrt{3^2+(-1)^2}^3 = \sqrt{10}^3 = 10\sqrt{10}$.

b) Wir erweitern den Bruch geeignet (Standardtrick: $z\bar{z}$ ist reell, daher ergibt $1/z = 1/z\cdot\bar{z}/\bar{z} = \bar{z}/(z\bar{z})$ einen reellen Nenner):

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{3-i} = \frac{1}{3-i}\cdot\frac{3+i}{3+i} = \frac{3+i}{3^2-i^2} = \frac{3+i}{10} = \frac{3}{10}+\frac{1}{10}i.$$

Also hat $1/z$ den Realteil $\frac{3}{10}$ und den Imaginärteil $\frac{1}{10}$. Der Betrag von $1/z$ ist $|1/z| = \sqrt{\frac{9}{100}+\frac{1}{100}} = \sqrt{1/10} = \sqrt{10}/10$, alternativ: $|1/z| = 1/|z| = 1/\sqrt{10} = \sqrt{10}/10$.

c) Es ergibt sich $z\cdot w = (3-i)(-1+2i) = -3+6i+i-2i^2 = -1+7i$. Also hat $z\cdot w$ Realteil -1 und Imaginärteil 7. Außerdem gilt $|z\cdot w| = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} = |z|\cdot|w|$.

d) Es ist $\bar{z}^2 = \left(\overline{3-i}\right)^2 = (3+i)^2 = 9+6i+i^2 = 8+6i$ und wegen $w^2 = (-1+2i)^2 = 1-4i+4i^2 = -3-4i$ ergibt sich

$$\frac{1}{w^2} = \frac{1}{-3-4i}\cdot\frac{-3+4i}{-3+4i} = \frac{-3+4i}{9-16i^2} = \frac{-3+4i}{25} = -\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i.$$

$\bar{z}^2+1/w^2 = (8+6i)+(-\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i)$ hat somit Realteil $8-\frac{3}{25} = \frac{197}{25}$ und Imaginärteil $6+\frac{4}{25} = \frac{154}{25}$. Der Betrag von $\bar{z}^2+1/w^2$ lautet $|\bar{z}^2+1/w^2| = \sqrt{197^2+154^2}/25 = \sqrt{2501}/5$.

Aufgabe 7

a) Es gilt $z^2 - 2z + 3 = (z-1)^2 + 2$. Die Gleichung $z^2 - 2z + 3 = 0$ ist also genau dann erfüllt, wenn $(z-1)^2 = -2$. Dies bedeutet $z - 1 = i\sqrt{2}$ oder $z - 1 = -i\sqrt{2}$, also hat die Gleichung die zwei Lösungen $z_1 = 1 + i\sqrt{2}$ und $z_2 = 1 - i\sqrt{2}$.

b) Mit dem Ansatz $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ erhalten wir

$$\begin{aligned} z^2 = |z|^2 \quad &\Leftrightarrow \quad a^2 + 2aib + (ib)^2 = a^2 + b^2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + 2aib - b^2 = a^2 + b^2 \\ &\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \quad a^2 - b^2 = a^2 + b^2 \text{ und } 2ab = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -2b^2 = 0 \text{ und } \big(a = 0 \text{ oder } b = 0\big) \\ &\Leftrightarrow \quad b = 0 \text{ und } \big(a = 0 \text{ oder } b = 0\big) \\ &\Leftrightarrow \quad b = 0. \end{aligned}$$

[In $(*)$ verwenden wir, dass zwei komplexe Zahlen genau dann gleich sind, wenn sie den selben Real- und Imaginärteil besitzen.]
Also ist $z^2 = |z|^2$ genau dann erfüllt, wenn $\operatorname{Im}(z) = 0$ bzw. $z \in \mathbb{R}$ ist.

c) Nach dem Fundamentalsatz der Algebra zerfällt jedes nicht-konstante, normierte Polynom über $\mathbb{C}$ in ein Produkt aus Linearfaktoren. Darum besitzt ein Polynom dritten Grades genau drei Nullstellen. (Hierbei wird jede Nullstelle gemäß ihrer Vielfachheit gezählt.)

Aufgrund des Hinweises machen wir den Ansatz $z = x(1+i)$ mit $x \in \mathbb{R}$. Es ergibt sich

$$x^3(1+i)^3 - (3-i)x^2(1+i)^2 - ix(1+i) + 1 + 3i = 0.$$

Wegen $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$ und $(1+i)^3 = 2i(1+i) = -2 + 2i$ führt dies zu der Gleichung

$$x^3(-2+2i) + x^2(-2-6i) + x(1-i) + 1 + 3i = 0$$

und die Aufspaltung in Real- und Imaginärteil liefert (Man beachte $x \in \mathbb{R}$.)

$$-2x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0 \qquad \text{und} \qquad 2x^3 - 6x^2 - x + 3 = 0.$$

Addieren dieser Gleichungen liefert $-8x^2 + 4 = 0$, also $x^2 = \frac{1}{2}$, d. h. $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ oder $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Durch Einsetzen überzeugt man sich, dass dies tatsächlich Lösungen beider Gleichungen sind. Damit haben wir zwei Lösungen unserer ursprünglichen Gleichung gefunden:

$$z_1 := \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(1+i) \quad \text{und} \quad z_2 := -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}(1+i).$$

Es gilt $(z - z_1)(z - z_2) = (z - z_1)(z + z_1) = z^2 - z_1^2 = z^2 - i$. Für $z \neq z_1$ und $z \neq z_2$ dividieren wir die ursprüngliche Gleichung durch $z^2 - i$ (Polynomdivision) und erhalten

$$0 = \frac{z^3 - (3-i)z^2 - iz + 1 + 3i}{z^2 - i} = z - (3-i).$$

Die dritte Lösung ist somit $z_3 := 3 - i$. Nach der anfänglichen Bemerkung kann es nicht mehr als 3 verschiedene Lösungen der Gleichung geben, daher ist

$$z^3 - (3-i)z^2 - iz + 1 + 3i \quad \Leftrightarrow \quad z \in \{z_1, z_2, z_3\}.$$

Aufgabe 8

a) Hier handelt es sich um die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, die vom Punkt $-1 - i$ den gleichen Abstand haben wie vom Punkt $3 + 3i$. Das ist die Mittelsenkrechte der Verbindungsstrecke dieser beiden Punkte, also die Gerade $\operatorname{Im} z = -\operatorname{Re} z + 2$.

b) Dies ist der Schnitt zwischen dem Äußeren des Kreises um i mit Radius 1 (einschließlich der Kreislinie) und dem Inneren des Kreises um $1 + 2i$ mit Radius 3 (ohne Rand). Die Menge ist in der Skizze schraffiert.

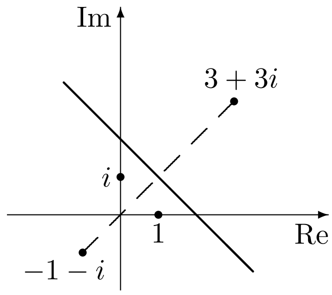
c) Durch $2 < |z| < 3$ wird ein Kreisring um den Punkt 0 mit innerem Radius 2 und äußerem Radius 3 beschrieben. Durch die Bedingung für $\arg z$ wird daraus ein Sektor ausgeschnitten (siehe Skizze; $\varphi = \frac{2}{3}\pi$, $\psi = \frac{4}{3}\pi$); der Rand gehört diesmal nicht dazu.

d) Die komplexe Zahl $z = x + iy$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$) liegt genau dann in dieser Menge, wenn

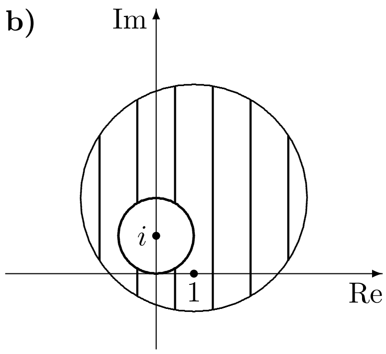
$$1 \geqslant \operatorname{Re}(z^2) = \operatorname{Re}\big((x+iy)^2\big) = \operatorname{Re}(x^2 + 2ixy - y^2) = x^2 - y^2$$

gilt, d. h. für $x^2 \leqslant 1 + y^2$, also $|x| \leqslant \sqrt{1+y^2}$ bzw. $-\sqrt{1+y^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{1+y^2}$. Die Menge ist in der Skizze schraffiert; man beachte, dass es sich um eine unbeschränkte Menge handelt.

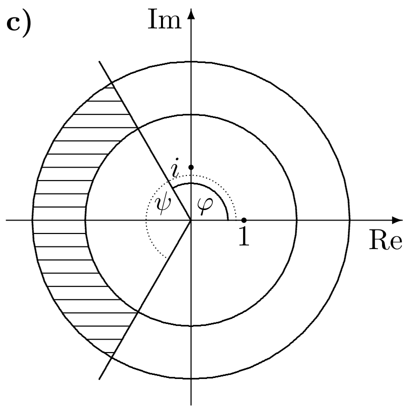
a)



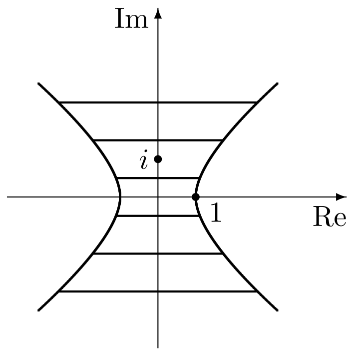
b)



c)



d)



Aufgabe 9 (P)

a) Sei $x \geqslant 0$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$. Nach dem binomischen Lehrsatz gilt

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \geqslant \binom{n}{2} x^2,$$

weil alle Summanden $\geqslant 0$ sind. Ferner ist

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n}{2}\,(n-1) \overset{n \geqslant 2}{\geqslant} \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} = \frac{n^2}{4}\,.$$

Hiermit folgt

$$(1+x)^n \geqslant \frac{n^2}{4}\, x^2\,.$$

b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Im Fall $n = 1$ ist $\sqrt[1]{1} = 1 \leqslant 3 = 1 + \frac{2}{\sqrt{1}}$ erfüllt. Für $n \geqslant 2$ ergibt sich nach **a)**

$$\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n \geqslant \frac{n^2}{4}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^2 = n \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} \geqslant \sqrt[n]{n}\,.$$

c) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir müssen ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so angeben, dass $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant n_0$ erfüllt ist. Dabei darf n_0 von der (fest vorgegebenen) Zahl ε abhängen.

Zunächst stellen wir fest, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$1 \leqslant \sqrt[n]{n} \overset{\textbf{b)}}{\leqslant} 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$$

bzw. äquivalent hierzu

$$0 \leqslant \sqrt[n]{n} - 1 \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}}\,.$$

Daher ist die Abschätzung $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$ erfüllt, wenn $\frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon$ ist.

Wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{4}{\varepsilon^2}$ (Da die natürlichen Zahlen nicht nach oben beschränkt sind, existiert ein solches n_0.). Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant n_0$

$$n > \frac{4}{\varepsilon^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sqrt{n} > \frac{2}{\varepsilon} \qquad \Leftrightarrow \qquad \varepsilon > \frac{2}{\sqrt{n}}\,.$$

Wir zuvor bemerkt, gilt für diese n

$$|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon\,.$$

Bemerkung: Wir haben $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ gezeigt.