UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2009/10

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 5. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) i) Wir verwenden die geometrische Summenformel

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}.$$

In Aufgabe 3 a) des 3. Übungsblatts wurde diese für reelle $q \neq 1$ gezeigt. Diesen Beweis kann man wortwörtlich auch für $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ führen. Danach gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{22}(1-i)^k &= -1 + \sum_{k=0}^{22}(1-i)^k = -1 + \frac{1-(1-i)^{23}}{1-(1-i)} = -1 + \frac{1-(1-i)^{23}}{i} \cdot \frac{-i}{-i} \\ &= -1 - i\big(1-(1-i)^{23}\big).\end{aligned}$$

Zur Berechnung von $(1-i)^{23}$ benutzen wir die Darstellung

$$1 - i = \sqrt{2}\big(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4)\big) = \sqrt{2}\big(\cos(\pi/4) - i\sin(\pi/4)\big)$$

und die Formel von Moivre

$$\begin{aligned}(1-i)^{23} &= \sqrt{2}^{23}\big(\cos(\pi/4) - i\sin(\pi/4)\big)^{23} = 2^{23/2}\big(\cos(23\cdot\pi/4) - i\sin(23\cdot\pi/4)\big) \\ &= 2^{23/2}\big(\cos(24\cdot\pi/4 - \pi/4) - i\sin(24\cdot\pi/4 - \pi/4)\big) \\ &= 2^{23/2}\big(\cos(3\cdot 2\pi - \pi/4) - i\sin(3\cdot 2\pi - \pi/4)\big) \\ &= 2^{23/2}\big(\cos(-\pi/4) - i\sin(-\pi/4)\big) = 2^{23/2}\big(2^{-1/2} + i2^{-1/2}\big) = 2^{11}(1+i).\end{aligned}$$

Hiermit erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{22}(1-i)^k = -1 - i\big(1 - 2^{11}(1+i)\big) = -1 - 2^{11} + i(2^{11}-1) = -2049 + 2047\,i\,.$$

ii) Mit $1+i = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\right)$ und $1-i = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{4}) - i\sin(\frac{\pi}{4})\right)$ ergibt sich nach der Formel von Moivre

$$\begin{aligned}(1+i)^{2n} + (1-i)^{2n} &= 2^n\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - i\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) \\ &= 2^{n+1}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 2k+1, \\ (-1)^k 2^{2k+1} & \text{falls } n = 2k. \end{cases}\end{aligned}$$

b) i) Es ist $z^3+8 = (z+2)(z^2-2z+4) = (z+2)\big((z-1)^2+3\big) = 0 \Leftrightarrow z = -2$ oder $(z-1)^2 = -3$ $\Leftrightarrow z = -2$ oder $z - 1 = \sqrt{3}\,i$ oder $z-1 = -\sqrt{3}\,i \Leftrightarrow z = -2$ oder $z = 1+\sqrt{3}\,i$ oder $z = 1 - \sqrt{3}\,i$.

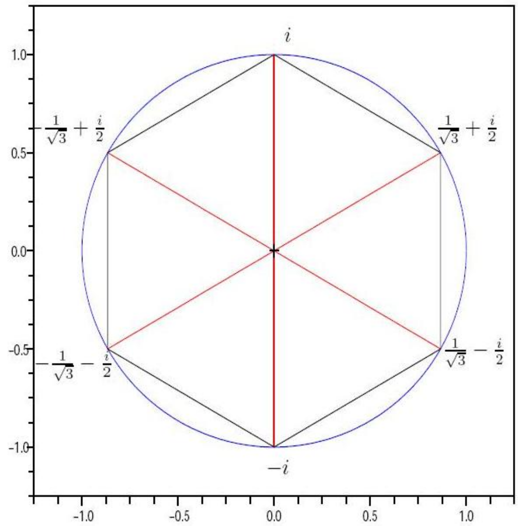
ii) Für $z = 0$ ist die gegebene Gleichung sicher nicht erfüllt. Ist $z \neq 0$, so gibt es (eindeutig bestimmte) $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ (Polardarstellung). Nach der Formel von Moivre gilt dann

$$z^6 = r^6\big(\cos(6\varphi) + i\sin(6\varphi)\big).$$

Dies ist gleich $-1 = 1 \cdot (\cos(\pi) + i\sin(\pi))$ genau dann, wenn $r^6 = 1$ und $6\varphi = \pi + 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ gilt, also genau dann, wenn $r = 1$ und $\varphi = (2k+1)\frac{\pi}{6}$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ ist. Die Bedingung $\varphi \in [0, 2\pi)$ ist nur für $k \in \{0, 1, \ldots, 5\}$ erfüllt. Somit besitzt die Gleichung $z^6 = -1$ genau die sechs (verschiedenen) Lösungen

$$z_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{6}\right) \qquad \text{für } k \in \{0, 1, \ldots, 5\}.$$

All diese Zahlen liegen in der komplexen Zahlenebene auf dem Einheitskreis.



iii) Zuerst bestimmen wir die Polardarstellung von $1-i$. Wegen $|1-i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ und $\arg(1-i) = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$ lautet diese $1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$. Daher gilt $z^5 = 1 - i$ genau dann, wenn $|z|^5 = \sqrt{2}$ und $5\arg(z) = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ gilt. Wegen der Forderung $\arg(z) \in [0, 2\pi)$ erhalten wir genau die 5 Lösungen $z_k \in \mathbb{C}$ mit $|z_k| = 2^{\frac{1}{10}}$ und $\arg(z_k) = \frac{7\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}$, also $z_k = 2^{\frac{1}{10}}\left(\cos(\frac{7\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}) + i\sin(\frac{7\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5})\right)$ für $k \in \{0, 1, \ldots, 4\}$.

Aufgabe 2

a) Etwa folgende Folgen erfüllen das Verlangte:

i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 7 + (-1)^n \cdot 6$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

ii) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = 0$ für gerade n und $b_n = n$ für ungerade n.

iii) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = (-1)^n n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

iv) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n = 2009 + \frac{(-1)^n}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) **i)** Offenbar gilt

$$a_{2k} = \left(1 + (-1)^{2k}\right)^{2k} = (1+1)^{2k} = 2^{2k} \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Also ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht nach oben beschränkt. Weiter gilt

$$a_{2k+1} = \left(1 + (-1)^{2k+1}\right)^{2k+1} = (1-1)^{2k+1} = 0 \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Damit ist 0 ein Häufungspunkt der Folge. Weitere Häufungspunkte gibt es nicht, denn zu jedem anderen Punkt kann man eine so kleine Umgebung wählen, dass nur endlich viele Folgeglieder a_n in ihr liegen.

ii) Wegen $a_{3k} = 1 + 1/2^{3k} \to 1$, $a_{3k-1} = 2 \to 2$ und $a_{3k-2} = 2 + 1 + 1/(3k-2) \to 3$ für $k \to \infty$ ergeben sich hier die drei Häufungspunkte 1, 2 und 3. Weitere Häufungspunkte gibt es nicht (Warum?).

Aufgabe 3

a) Wegen $a_n = \frac{2n}{n+1} = \frac{2}{1+\frac{1}{n}}$ vermuten wir, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$ gegen 2 konvergiert.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$|a_n - 2| = \left|\frac{2n - 2(n+1)}{n+1}\right| = \frac{2}{n+1}.$$

Daher ergibt sich

$$|a_n - 2| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{n+1} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{2}{\varepsilon} - 1.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{2}{\varepsilon} - 1$. Wie eben gesehen, gilt dann $|a_n - 2| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant N$. Also konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 2.

Ist $\varepsilon = 10^{-10}$, so kann man beispielsweise $N = 2 \cdot 10^{10} > 2 \cdot 10^{10} - 1 = \frac{2}{\varepsilon} - 1$ nehmen. Damit gilt $|a_n - 2| < 10^{-10}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2 \cdot 10^{10}$.

b) **i)** In Aufgabe **4 e)** wird gezeigt, dass $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \to 0$ für $n \to \infty$ gilt. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt also die Voraussetzung i). Allerdings ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent. (Die harmonische Reihe wäre ein weiteres Gegenbeispiel.)

ii) Definitionsgemäß konvergiert eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert $a \in \mathbb{C}$, falls es zu jedem $\widetilde{\varepsilon} > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ so gibt, dass $|a_n - a| < \widetilde{\varepsilon}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant N$ gilt.

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genüge der Voraussetzung ii). Wir behaupten, dass dann $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert. Denn:

Sei $\widetilde{\varepsilon} > 0$. Setze $\varepsilon := \sqrt{\widetilde{\varepsilon}/2}$. Nach Voraussetzung ii) existiert zu diesem $\varepsilon > 0$ ein N so, dass für alle $n \geqslant N$ stets $|a_n - 0| = |a_n| < 2\varepsilon^2 = \widetilde{\varepsilon}$ ist. Gemäß Definition bedeutet dies, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und zwar gegen 0.

iii) Sei etwa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wegen $|a_n + a_{n+1}| = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Bedingung iii) erfüllt. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert jedoch.

Aufgabe 4

a) Diese Folge ist konvergent, denn es gilt

$$\frac{n^2 + 3n - 4}{1 + n^2 + 4n^3} = \frac{1/n + 3/n^2 - 4/n^3}{1/n^3 + 1/n + 4} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{0 + 0 - 0}{0 + 0 + 4} = 0.$$

b) Wegen $a_{2k} = 1 + \frac{1}{2k} \to 1$ $(k \to \infty)$ und $a_{2k+1} = -1 + \frac{1}{2k+1} \to -1$ $(k \to \infty)$ besitzt die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die zwei verschiedenen Häufungspunkte 1 und -1. Daher ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

c) Mit der bekannten Formel $\sum_{k=1}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2}$, $m \in \mathbb{N}$, ergibt sich für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{k}{n^4} = \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{n^2} k = \frac{n^2(n^2+1)}{2n^4} = \frac{1 \cdot (1 + n^{-2})}{2}.$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} n^{-2} = 0$ folgt mit den Grenzwertsätzen $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1\cdot(1+0)}{2} = \frac{1}{2}$.

d) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n = \frac{(2\sqrt{n} + 3)^2}{(3\sqrt[3]{n} + 2)^3} = \frac{(\sqrt{n}\,(2 + 3/\sqrt{n}))^2}{(\sqrt[3]{n}\,(3 + 2/\sqrt[3]{n}))^3} = \frac{n \cdot (2 + 3/\sqrt{n})^2}{n \cdot (3 + 2/\sqrt[3]{n})^3} = \frac{(2 + 3/\sqrt{n})^2}{(3 + 2/\sqrt[3]{n})^3}.$$

Wegen $2 + 3/\sqrt{n} \to 2$ und $3 + 2/\sqrt[3]{n} \to 3 \neq 0$ für $n \to \infty$ konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach den Grenzwertsätzen gegen $\frac{2^2}{3^3} = \frac{4}{27}$.

e) Mit Hilfe der binomischen Formel $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, $a, b \in \mathbb{R}$, erhält man für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\,.$$

Wegen $|\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ für $n \to \infty$ folgt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

f) Der binomische Lehrsatz liefert für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$(1+n)^{42} = \sum_{k=0}^{42} \binom{42}{k} n^k = \alpha_0 + \alpha_1 n + \ldots + \alpha_{42} n^{42}, \quad \text{wobei} \quad \alpha_k := \binom{42}{k}.$$

Wegen $\alpha_{42} = \binom{42}{42} = 1$ ergibt sich $(1+n)^{42} - n^{42} = \alpha_0 + \alpha_1 n + \ldots + \alpha_{41} n^{41}$. Folglich ist

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\alpha_0 + \alpha_1 n + \ldots + \alpha_{40} n^{40} + \alpha_{41} n^{41}}{n^{41}} \\ &= \frac{\alpha_0}{n^{41}} + \frac{\alpha_1}{n^{40}} + \ldots + \frac{\alpha_{40}}{n} + \alpha_{41} \xrightarrow{n\to\infty} \alpha_{41} = \binom{42}{41} = \binom{42}{1} = 42. \end{aligned}$$

Aufgabe 5

a) Wir erinnern uns zunächst an die Definition einer Teilfolge: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{N}$ mit $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$. Ist $b_k := a_{n_k}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ gesetzt, dann heißt $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n =: a$ und $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir zeigen, dass $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert und $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$ gilt.

Sei dazu $\varepsilon > 0$. Wegen $a_n \to a$ für $n \to \infty$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant N$. Wegen $n_1 < n_2 < \ldots$ existiert ein $K \in \mathbb{N}$ mit $n_K \geqslant N$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geqslant K$ ist dann $n_k \geqslant n_K \geqslant N$. Deshalb gilt $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ für alle $k \geqslant K$, d.h. $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a.

b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitze eine divergente Teilfolge. Zu zeigen ist, dass dann $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent ist. Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Annahme: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Dann konvergiert laut **a)** jede Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dies widerspricht der Voraussetzung, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine divergente Teilfolge besitzt. Also ist die Annahme falsch und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

Aufgabe 6

a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Im allgemeinen folgt aus der Konvergenz von $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ nicht die Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ist etwa die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $a_n = (-1)^n$. Dann sind $a_{2k} = 1$ und $a_{2k+1} = -1$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Daher konvergieren die beiden Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ für $k \to \infty$. Jedoch ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, weil $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die zwei verschiedenen Häufungspunkte -1 und 1 besitzt.

b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Behauptung:

$$(a_n) \text{ konvergiert gegen } a \quad \Leftrightarrow \quad (a_{2k}) \text{ und } (a_{2k+1}) \text{ konvergieren mit } \lim_{k\to\infty} a_{2k} = a = \lim_{k\to\infty} a_{2k+1}\,.$$

“$\Rightarrow$”: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gegen a. Gemäß **5 a)** konvergiert dann auch jede Teilfolge von (a_n) gegen den selben Grenzwert. Insbesondere trifft dies auf die beiden Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ zu.

“$\Leftarrow$”: Nun seien die beiden Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent und es gelte $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = a = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1}$. Zu zeigen ist, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert.

Sei dazu $\varepsilon > 0$. Wegen $a_{2k} \to a$ für $k \to \infty$ gibt es ein $K_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_{2k} - a| < \varepsilon \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \text{ mit } k \geqslant K_1,$$

woraus

$$|a_m - a| < \varepsilon \qquad \text{für alle geraden } m \in \mathbb{N} \text{ mit } m \geqslant 2K_1$$

folgt. Wegen $a_{2k+1} \to a$ für $k \to \infty$ gibt es ein $K_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_{2k+1} - a| < \varepsilon \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \text{ mit } k \geqslant K_2,$$

woraus

$$|a_m - a| < \varepsilon \qquad \text{für alle ungeraden } m \in \mathbb{N} \text{ mit } m \geqslant 2K_2 + 1$$

folgt. Demnach gilt für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geqslant \max\{2K_1, 2K_2 + 1\}$

$$|a_m - a| < \varepsilon,$$

d.h. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und zwar gegen a.

Aufgabe 7

a) Zunächst formen wir den Ausdruck $\frac{1-(1-\frac{1}{n})^5}{1-(1-\frac{1}{n})}$ mit Hilfe der geometrischen Summenformel (vgl. Aufgabe 3 a) vom 3. Übungsblatt mit $n = 5$ und $q = 1 - \frac{1}{n}$) um und verwenden im Anschluss $\frac{1}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$ sowie die Grenzwertsätze

$$\frac{1-(1-\frac{1}{n})^5}{1-(1-\frac{1}{n})} = \sum_{k=0}^{5-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k = 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^3 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^4$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} 1 + 1 + 1^2 + 1^3 + 1^4 = 5\,.$$

b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2} + (\frac{3+4i}{15})^n & \text{falls } n = 2k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \\ \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n} & \text{falls } n = 2k+1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$

Es gilt $|\frac{3+4i}{15}| = \frac{1}{15}|3 + 4i| = \frac{1}{15}\sqrt{3^2 + 4^2} = \frac{1}{3}$ und $|(\frac{3+4i}{15})^n| = |\frac{3+4i}{15}|^n \leqslant (\frac{1}{3})^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $(\frac{1}{3})^n \to 0$ für $n \to \infty$ folgt $(\frac{3+4i}{15})^n \to 0$ für $n \to \infty$, so dass sich $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} + (\frac{3+4i}{15})^n = \frac{1}{2}$ ergibt. Nach Aufgabe **5 a)** ist dann auch $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2} + (\frac{3+4i}{15})^{2k} = \frac{1}{2}$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n} &= \left(\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}\right) \cdot \frac{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n}}{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n}} = \frac{n + \sqrt{n} - n}{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n(1 + 1/\sqrt{n})} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{1 + 1/\sqrt{n}} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + 1/\sqrt{n}} + 1}\,. \end{aligned}$$

Aufgrund von $\lim_{n\to\infty} 1/\sqrt{n} = 0$ folgt nach den Grenzwertsätzen

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{1}{2}\,.$$

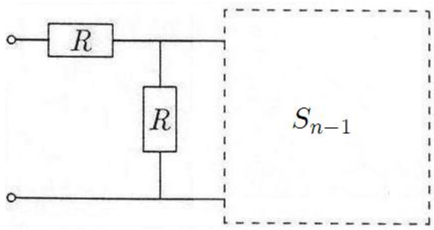
Nach Aufgabe **5 a)** ist damit auch $\lim_{k\to\infty} \sqrt{2k + 1 + \sqrt{2k + 1}} - \sqrt{2k + 1} = \frac{1}{2}$.

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt somit die beiden konvergenten Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$. Ferner gilt $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \frac{1}{2} = \lim_{k\to\infty} a_{2k+1}$. Daher liefert Aufgabe **6 b)**, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\frac{1}{2}$ konvergiert.

Aufgabe 8

a) Da in S_1 zwei Widerstände R in Reihe geschaltet sind, ist $W_1 = 2R$.

Für $n \geqslant 2$ sieht die Schaltung S_n folgendermaßen aus:



$$\underbrace{\phantom{S_{n-1}}}_{\text{Widerstand } W_{n-1}}$$

$$\underbrace{\phantom{R \quad S_{n-1}}}_{\text{Widerstand } \widetilde{R}}$$

Da die Widerstände R und W_{n-1} parallel geschaltet sind, gilt

$$\frac{1}{\widetilde{R}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{W_{n-1}} \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{R} = \frac{RW_{n-1}}{R + W_{n-1}} \, .$$

R und $\widetilde{R}$ sind in Reihe geschaltet, daher ergibt sich für den Gesamtwiderstand von S_n

$$W_n = R + \widetilde{R} = R + \frac{RW_{n-1}}{R + W_{n-1}} \, .$$

Zusammen haben wir

$$W_1 = 2R, \qquad W_n = R + \frac{RW_{n-1}}{R + W_{n-1}} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := W_n/R$ ist gegeben durch

$$a_1 = 2, \qquad a_n = 1 + \frac{a_{n-1}}{1 + a_{n-1}} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Wir zeigen durch vollständige Induktion, dass $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \leqslant a_n \leqslant 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

IA: Wegen $a_1 = 2$ ist $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \leqslant a_n \leqslant 2$ für $n = 1$ erfüllt. Dabei beachte man, dass aus $\sqrt{5} \leqslant 3$ die Gültigkeit der Ungleichung $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \leqslant \frac{1}{2}(1+3) = 2$ folgt.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$. Für dieses n gelte $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \leqslant a_n \leqslant 2$ (IV). Dann folgt einerseits

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 1 + \frac{a_n}{1+a_n} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{a_n} + 1} \overset{\text{IV}}{\geqslant} 1 + \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})} + 1} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} \\ &= 1 + \frac{-2+2\sqrt{5}}{9-5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \end{aligned}$$

und andererseits

$$a_{n+1} = 1 + \frac{a_n}{1+a_n} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{a_n} + 1} \overset{\text{IV}}{\leqslant} 1 + \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \leqslant 2.$$

Außerdem ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= 1 + \frac{a_n}{1+a_n} - a_n = \frac{1 + a_n + a_n - a_n(1+a_n)}{1+a_n} = \frac{-a_n^2 + a_n + 1}{1+a_n} \\ &= -\frac{(a_n - \frac{1+\sqrt{5}}{2})(a_n - \frac{1-\sqrt{5}}{2})}{1+a_n} \leqslant 0, \qquad \text{da } a_n \geqslant \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist als beschränkte und monoton fallende Folge konvergent. Aus

$$a_{n+1} = 1 + \frac{a_n}{1+a_n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

folgt für den Grenzwert $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ nach den Grenzwertsätzen (Man beachte $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$.)

$$a = 1 + \frac{a}{1+a} \quad \Leftrightarrow \quad -a^2 + a + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \;\text{ oder }\; a = \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Wegen $a_n \geqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ muss auch auch $a \geqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ gelten. Deshalb ist $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Aufgabe 9

Definiere $a_n := (1+\frac{1}{n})^n$. Zu zeigen ist $a_n \leqslant a_{n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dies ist äquivalent zu

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leqslant \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\iff \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^n \leqslant \frac{n+2}{n+1} \iff \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n \geqslant \frac{n+1}{n+2}.$$

Die letzte Ungleichung gilt: Die Bernoullische Ungleichung liefert nämlich

$$\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n = \left(\frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2}\right)^n = \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \geqslant 1 - \frac{n}{(n+1)^2},$$

und wegen $(n+1)^2 = n^2+2n+1 \geqslant n^2+2n = n(n+2)$ folgt

$$\geqslant 1 - \frac{n}{n(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Sei $b_n := (1+\frac{1}{n})^{n+1}$. Zu zeigen ist $b_n \geqslant b_{n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wir formen die Aussage $b_n \geqslant b_{n+1}$ äquivalent um:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \geqslant \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \geqslant \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}$$

$$\iff \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1} \geqslant \frac{n+2}{n+1} \iff \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} \geqslant \frac{n+2}{n+1}.$$

Um die letzte Ungleichung zu zeigen, verwenden wir wieder die Bernoullische Ungleichung und $(n+1)^2 \geqslant n(n+2)$:

$$\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} \geqslant 1 + \frac{n+1}{n(n+2)} \geqslant 1 + \frac{n+1}{(n+1)^2} = 1 + \frac{1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}.$$

Aufgabe 10 (P)

a) Gegeben seien $0 \leqslant q < 1$ und eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ mit $|a_{n+1}-a_n| \leqslant q^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

Beh.: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ ist eine Cauchy-Folge.

Wir zeigen zunächst: $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geqslant N \;\; \forall k \in \mathbb{N}\cup\{0\}: \quad |a_{n+k} - a_n| < \varepsilon$.

Für beliebige $k, n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ gilt

$$\begin{aligned}
a_{n+k} - a_n &= a_{n+k} + \left(\sum_{j=0}^{k-2} a_{n+j+1}\right) - \left(\sum_{l=0}^{k-2} a_{n+l+1}\right) - a_n \\
&\overset{j:=l+1}{=} a_{n+k} + \left(\sum_{j=0}^{k-2} a_{n+j+1}\right) - \left(\sum_{j=1}^{k-1} a_{n+j}\right) - a_n \\
&= \left(\sum_{j=0}^{k-1} a_{n+j+1}\right) - \left(\sum_{j=0}^{k-1} a_{n+j}\right) = \sum_{j=0}^{k-1} (a_{n+j+1} - a_{n+j}). \qquad (1)
\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich unter Verwendung der Dreiecksungleichung und der geometrischen Summenformel

$$|a_{n+k} - a_n| \leqslant \sum_{j=0}^{k-1} |a_{n+j+1} - a_{n+j}| \leqslant \sum_{j=0}^{k-1} q^{n+j} = q^n \sum_{j=0}^{k-1} q^j = q^n \frac{1-q^k}{1-q} \leqslant q^n \frac{1}{1-q}.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $0 \leqslant q < 1$ konvergiert die Folge $(\frac{q^n}{1-q})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0, daher finden wir ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|\frac{q^n}{1-q} - 0| = \frac{q^n}{1-q} < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant N$ gilt. Demzufolge ist

$$|a_{n+k} - a_n| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geqslant N \text{ und } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{2}$$

Hieraus folgt

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \qquad \text{für alle } m, n \in \mathbb{N} \text{ mit } m, n \geqslant N.$$

Denn: Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geqslant N$ beliebig. Ohne Einschränkung sei $m \geqslant n$. Dann ist $k := m - n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und nach (2) ergibt sich $|a_m - a_n| = |a_{n+k} - a_n| < \varepsilon$.

b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_0 := 0, \quad a_1 := 1, \quad a_{n+1} := \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}) \ \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Wir berechnen die ersten Folgeglieder

$$a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + a_0) = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + a_1) = \frac{3}{4}, \quad a_4 = \frac{5}{8}, \quad a_5 = \frac{11}{16}$$

und bilden die Differenz von je zwei Folgegliedern

$$a_1 - a_0 = 1, \quad a_2 - a_1 = -\frac{1}{2}, \quad a_3 - a_2 = \frac{1}{4}, \quad a_4 - a_3 = -\frac{1}{8}, \quad a_5 - a_4 = \frac{1}{16}.$$

Wir vermuten $a_{n+1} - a_n = (-\frac{1}{2})^n$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dies bestätigen wir per Induktion:

IA: $n = 0$. Dies haben wir eben gesehen.

IS: Sei $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Für dieses n gelte $a_{n+1} - a_n = (-\frac{1}{2})^n$. Dann folgt

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n) - a_{n+1} = -\frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n) \overset{\text{IV}}{=} -\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})^n = (-\frac{1}{2})^{n+1}.$$

Somit sind die Voraussetzungen aus **a)** (z.B. mit $q = \frac{1}{2}$) erfüllt. Danach ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$, das Cauchysche Konvergenzkriterium liefert ihre Konvergenz. Sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Bilden wir in der Rekursionsformel von (a_n) den Limes $n \to \infty$, so erhalten wir unter Beachtung von $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_{n-1} = a$

$$a = \frac{1}{2}(a + a) \quad \Leftrightarrow \quad a = a.$$

Hieraus können wir keine Informationen über den Grenzwert a gewinnen.

Zur Bestimmung von a betrachten wir (1) mit $n = 0$, setzen dann $a_{j+1} - a_j = (-\frac{1}{2})^j$ ein und verwenden im Anschluss die geometrische Summenformel

$$a_k \overset{a_0=0}{=} a_k - a_0 = \sum_{j=0}^{k-1}(a_{j+1} - a_j) = \sum_{j=0}^{k-1}(-\frac{1}{2})^j = \frac{1 - (-\frac{1}{2})^k}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}(1 - (-\frac{1}{2})^k).$$

Wegen $(-\frac{1}{2})^k \to 0$ für $k \to \infty$ folgt $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \frac{2}{3}$.