Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2009/10
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 6. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$3 = \sqrt[n]{3^n} \leqslant a_n \leqslant \sqrt[n]{3^n + 3^n} = \sqrt[n]{2 \cdot 3^n} = 3 \cdot \sqrt[n]{2}.$$

Wegen $\sqrt[n]{2} \to 1$ $(n \to \infty)$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$.

Bemerkung: Analog lässt sich für alle $a, b \geqslant 0$ zeigen: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max\{a, b\}$.

b) Sei $a > 0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir

$$a_n = \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}} = \frac{1 - a^{-2n}}{1 + a^{-2n}} = \frac{a^{2n} - 1}{a^{2n} + 1}\,.$$

1. Fall: $a \in (0,1)$. Aufgrund von $a^2 \in (0,1)$ ist $a^{2n} = (a^2)^n \to 0$ $(n \to \infty)$, woraus

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{2n} - 1}{a^{2n} + 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$$

folgt.

2. Fall: $a = 1$. Hier ergibt sich $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ist.

3. Fall: $a \in (1, \infty)$. Wegen $a^2 > 1$ ist $0 < \frac{1}{a^2} < 1$. Daher gilt $a^{-2n} = (\frac{1}{a^2})^n \to 0$ $(n \to \infty)$ und

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - a^{-2n}}{1 + a^{-2n}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1.$$

Bemerkung: Man kann auch mit Hilfe folgender Darstellungen argumentieren

$$a_n = \frac{a^n + a^{-n} - 2a^{-n}}{a^n + a^{-n}} = 1 - \frac{2a^{-n}}{a^n + a^{-n}} = 1 - \frac{2}{a^{2n} + 1}$$

oder

$$a_n = \frac{-a^n - a^{-n} + 2a^n}{a^n + a^{-n}} = -1 + \frac{2a^n}{a^n + a^{-n}} = -1 + \frac{2}{1 + a^{-2n}}\,.$$

c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}\,.$$

Wegen

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = e \cdot 1$$

folgt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{e}\,.$$

d) Bekanntlich konvergiert $(1+\frac{1}{m})^m$ für $m \to \infty$ streng monoton wachsend gegen e. Insbesondere hat man also die Abschätzung $(1+\frac{1}{m})^m < e$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und erhält

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} < \sqrt[n]{e} \xrightarrow{n\to\infty} 1\,.$$

Offensichtlich gilt zudem $a_n \geqslant 1$, und damit ist die Konvergenz $a_n \to 1$ bewiesen.

e) Aus der Konvergenz von $x_n := (1+\frac{1}{n})^n$ gegen e folgt, dass auch die Teilfolge $(x_k, x_{2k}, x_{3k}, \dots)$ gegen diesen Grenzwert konvergiert, dass also $x_{nk} \to e$ für $n \to \infty$ gilt. Somit ergibt sich

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{nk}\right)^n = \sqrt[k]{\left(1 + \frac{1}{nk}\right)^{nk}} = \sqrt[k]{x_{nk}} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt[k]{e}\,.$$

f) Auch die Teilfolge $(x_{1+k}, x_{2+k}, \dots)$ von (x_n) konvergiert gegen e, und man erhält

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n+k}\right)^n = x_{n+k} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+k}\right)^{-k} \xrightarrow{n\to\infty} e \cdot 1^{-k} = e\,.$$

Aufgabe 2

Vorbemerkung: In den Teilaufgaben **a)**, **c)**, **d)** verwenden wir das folgende Resultat: Sei $p \in \mathbb{N}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $b_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Gilt $b_n \to b$, so ist auch $\sqrt[p]{b_n} \to \sqrt[p]{b}$ für $n \to \infty$. Beweis: Wir stellen zunächst fest, dass für alle $y > x \geqslant 0$ gilt $\sqrt[p]{y} - \sqrt[p]{x} \leqslant \sqrt[p]{y-x}$. Der binomische Lehrsatz liefert nämlich

$$(\sqrt[p]{y-x} + \sqrt[p]{x}\,)^p = (\sqrt[p]{y-x}\,)^p + \sum_{k=1}^{p-1} \underbrace{\binom{p}{k} (\sqrt[p]{y-x}\,)^k (\sqrt[p]{x}\,)^{p-k}}_{\geqslant 0} + (\sqrt[p]{x}\,)^p \geqslant y.$$

Wir erhalten somit $|\sqrt[p]{b_n} - \sqrt[p]{b}| \leqslant \sqrt[p]{|b_n - b|}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Setzen wir $c_n := |b_n - b|$, so gilt $c_n \to 0$ und es reicht, $\sqrt[p]{c_n} \to 0$ zu zeigen. Wegen $c_n \to 0$ finden wir zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $c_n < \varepsilon^p$ für alle $n \geqslant N$. Es gilt dann $0 \leqslant \sqrt[p]{c_n} < \varepsilon$ für alle $n \geqslant N$, d.h. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[p]{c_n} = 0$.

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(\sqrt[n]{n}\,)^{1/3} = \sqrt[3n]{n} \leqslant a_n \leqslant \sqrt[3n]{6n} = \sqrt[3n]{6} \cdot \sqrt[3n]{n} = (\sqrt[n]{6}\,)^{1/3} \cdot (\sqrt[n]{n}\,)^{1/3}\,.$$

Aufgrund von $\sqrt[n]{n} \to 1$ und $\sqrt[n]{6} \to 1$ für $n \to \infty$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1\,.$$

b) Für jedes feste $p \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^p} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n}\,)^p = (\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\,)^p = 1^p = 1\,.$$

c) Wir verwenden das Resultat aus Aufgabe 3 b) vom 3. Übungsblatt mit $m = 3$

$$u^3 - v^3 = (u-v) \sum_{k=0}^{3-1} u^{3-1-k} v^k = (u-v)(u^2 + uv + v^2) \qquad (u, v \in \mathbb{R}). \tag{$*$}$$

Sind $u = \sqrt[3]{n^6+6n}$ und $v = \sqrt[3]{n^6+6}$, so gilt

$$\begin{aligned}
a_n &= n^3(u-v) \overset{(*)}{=} n^3 \cdot \frac{u^3-v^3}{u^2+uv+v^2} = n^3 \cdot \frac{(n^6+6n)-(n^6+6)}{(n^6+6n)^{2/3}+(n^6+6n)^{1/3}(n^6+6)^{1/3}+(n^6+6)^{2/3}} \\
&= n^3 \cdot \frac{6n-6}{(n^6(1+6/n^5))^{2/3}+(n^6(1+6/n^5))^{1/3}(n^6(1+6/n^6))^{1/3}+(n^6(1+6/n^6))^{2/3}} \\
&= \frac{6n^4-6n^3}{n^4(1+6/n^5)^{2/3}+n^2(1+6/n^5)^{1/3}\, n^2(1+6/n^6)^{1/3}+n^4(1+6/n^6)^{2/3}} \\
&= \frac{6-6/n}{(1+6/n^5)^{2/3}+(1+6/n^5)^{1/3}(1+6/n^6)^{1/3}+(1+6/n^6)^{2/3}} \\
&\xrightarrow{n\to\infty} \frac{6-0}{1^{2/3}+1^{1/3}\cdot 1^{1/3}+1^{2/3}} = 2\,.
\end{aligned}$$

Damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert 2.

d) Wir verwenden

$$u^m - v^m = (u-v)\sum_{k=0}^{m-1} u^{m-1-k}v^k = (u-v)(u^{m-1}+u^{m-2}v+\ldots+uv^{m-2}+v^{m-1})$$

für $m = 10$. Setzen wir $b_n := \sqrt[10]{1+3n^{-4}+n^{-9}}$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = n^4(b_n-1) = n^4 \cdot \frac{b_n^{10}-1^{10}}{b_n^9+b_n^8+\ldots+b_n+1} = \frac{n^4(3n^{-4}+n^{-9})}{b_n^9+b_n^8+\ldots+b_n+1} = \frac{3+n^{-5}}{b_n^9+b_n^8+\ldots+b_n+1}.$$

Wegen $b_n \to 1$ folgt $a_n \to \frac{3}{10}$ $(n\to\infty)$.

Aufgabe 3

a) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dann ist (a_n) beschränkt und (b_n) konvergent. Jedoch konvergiert die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n \cdot b_n = (-1)^n$ nicht.

b) Nun seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Behauptet wird, dass die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n \cdot b_n$ gegen 0 konvergiert.

Da (a_n) beschränkt ist, existiert eine Konstante $K > 0$ so, dass $|a_n| \leqslant K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Deshalb ergibt sich für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$|c_n| = |a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leqslant K|b_n|.$$

Wegen $b_n \to 0$ konvergiert auch $K|b_n| \to 0$ für $n \to \infty$. Daher folgt $c_n \to 0$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 4

Wir zeigen zunächst mit vollständiger Induktion, dass $0 < a_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
Induktionsanfang: Nach Voraussetzung ist $0 < a < 1$. Daher gilt $a_1 := \frac{1}{2}a \in (0, \frac{1}{2}) \subset (0,1)$.
Induktionsschluss: Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gelte $0 < a_n < 1$ (IV).
Es ist $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a + a_n^2) \geqslant \frac{1}{2}a > 0$ (dazu brauchen wir die Induktionsvoraussetzung gar nicht). Aus $0 < a_n < 1$ folgt $a_n^2 < 1$ und damit

$$a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a+a_n^2) < \tfrac{1}{2}(a+1) < \tfrac{1}{2}(1+1) = 1.$$

Nun zeigen wir mittels vollständiger Induktion, dass $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
Induktionsanfang: Es ist $a_2 - a_1 = \frac{1}{2}(a + a_1^2) - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a_1^2 = \frac{1}{2}a^2 \geqslant 0$.

Induktionsschluss: Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gelte $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$ (IV). Dann folgt

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a + a_{n+1}^2) - \tfrac{1}{2}(a + a_n^2) = \tfrac{1}{2}(a_{n+1}^2 - a_n^2) = \tfrac{1}{2}\underbrace{(a_{n+1} - a_n)}_{\geqslant 0 \text{ nach IV}}\underbrace{(a_{n+1} + a_n)}_{>0} \geqslant 0\,.$$

Da (a_n) monoton wächst und nach oben durch 1 beschränkt ist, konvergiert die Folge gegen einen gewissen Grenzwert $c \leqslant 1$. Diesen erhalten wir, indem wir in der Gleichung $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a + a_n^2)$ den Grenzübergang $n \to \infty$ durchführen. Dies liefert

$$c = \tfrac{1}{2}(a + c^2), \quad \text{also} \quad c^2 - 2c + a = 0, \quad \text{d. h.} \quad c_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-a}.$$

Da uns bereits $c \leqslant 1$ bekannt ist, ergibt sich $c = 1 - \sqrt{1-a}$.

Aufgabe 5

Es sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir konstruieren die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie folgt: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $x < x + \frac{1}{n}$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass zwischen diesen beiden reellen Zahlen eine rationale Zahl liegt; es gibt also ein $x_n \in \mathbb{Q}$ mit $x < x_n < x + \frac{1}{n}$.
Wegen $x \leqslant x_n \leqslant x + \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x + \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} x$ konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x.

Aufgabe 6

Mittels vollständiger Induktion zeigen wir zunächst $a_n > 0$ und $b_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
IA: Es sind $a_1 = a > 0$ und $b_1 = b > 0$.
IS: Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gelte $a_n > 0$ und $b_n > 0$ (IV). Dann ist

$$a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n} \overset{\text{IV}}{>} 0 \qquad \text{und} \qquad b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \overset{\text{IV}}{>} 0.$$

Hieraus folgt $a_n + b_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist sichergestellt, dass $a_n + b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wohldefiniert ist.

a) Um zu begründen, dass die Folge der Intervalle $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung bildet, müssen wir nachweisen:

i) $a_n \leqslant b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$;

ii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend;

iii) $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

Zu i): Wir zeigen durch vollständige Induktion $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

IA: Nach Voraussetzung ist $a_1 = a < b = b_1$.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gelte $a_n < b_n$ (IV). Dann folgt

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) - \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n} = \frac{(a_n + b_n)^2 - 4a_nb_n}{2(a_n + b_n)} = \frac{(a_n - b_n)^2}{2(a_n + b_n)} \overset{\text{IV}}{>} 0.$$

Zu ii): Wegen

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2b_n}{a_n + b_n} \overset{\text{i)}}{\geqslant} \frac{2b_n}{b_n + b_n} = 1 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend. Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fällt monoton, denn

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n) - b_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n) \overset{\text{i)}}{\leqslant} 0 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zu iii): Nach i) und ii) gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$a = a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant b_1 = b.$$

Also sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt mit $a \leqslant a_n \leqslant b$ und $a \leqslant b_n \leqslant b$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da beide Folgen überdies monoton sind, existieren nach dem Monotoniekriterium (vgl. Satz 7 in 7.5) die Grenzwerte $g_1 := \lim_{n\to\infty} a_n$ und $g_2 := \lim_{n\to\infty} b_n$. Durch den Grenzübergang $n \to \infty$ in der Rekursionsformel für (b_n) ergibt sich die Gleichung

$$g_2 = \frac{1}{2}(g_1 + g_2) \quad \Leftrightarrow \quad g_1 = g_2.$$

b) Wir zeigen per vollständiger Induktion, dass $a_n b_n = ab$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

IA: Für $n = 1$ ist nach Definition $a_n b_n = ab$ erfüllt.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gelte $a_n b_n = ab$ (IV). Dann folgt mit den Rekursionsformeln

$$a_{n+1}b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \cdot \frac{1}{2}\big(a_n + b_n\big) = a_n b_n \overset{\text{IV}}{=} ab.$$

Wegen $a_n b_n = ab$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab.$$

Andererseits ist nach den Grenzwertsätzen

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \big(\lim_{n\to\infty} a_n\big) \cdot \big(\lim_{n\to\infty} b_n\big) = g_1 g_2 \overset{\textbf{a)}}{=} g_1^2\,,$$

so dass $g_1^2 = ab$ folgt. Da aufgrund von $a_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ auch $g_1 \geqslant 0$ gilt, ist $g_1 = \sqrt{ab}$. Zusammenfassend erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt{ab}\,,$$

so dass die Zahl $\sqrt{ab}$ durch die Intervallschachtelung bestimmt wird.

Aufgabe 7

a) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{(-2)^{3k-1}}{3^{2k+1}} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{(-2)^{3k}}{3^{2k}} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{((-2)^3)^k}{(3^2)^k} = -\frac{1}{6} \cdot \Big(-\frac{8}{9}\Big)^k.$$

Daher ergibt sich mit Hilfe der geometrischen Summenformel für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-2)^{3k-1}}{3^{2k+1}} = -\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\Big(-\frac{8}{9}\Big)^k = -\frac{1}{6}\left[\sum_{k=0}^{n}\Big(-\frac{8}{9}\Big)^k - 1\right] = -\frac{1}{6}\left[\frac{1-(-8/9)^{n+1}}{1-(-8/9)} - 1\right].$$

Wegen $|-8/9| < 1$ ist $(-8/9)^{n+1} \to 0$ $(n \to \infty)$. Also konvergiert (s_n) gegen

$$\lim_{n\to\infty} s_n = -\frac{1}{6}\left[\frac{1-0}{1-(-8/9)} - 1\right] = -\frac{1}{6}\left[\frac{9}{9+8} - \frac{17}{17}\right] = \frac{4}{51}\,.$$

b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = \frac{1}{0!} - \frac{1}{(n+1)!} \xrightarrow{n\to\infty} 1\,.$$

Folglich konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!}$ und hat den Wert 1.

c) Nach dem binomischen Satz gilt für jedes $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{m+k} = \Big(\frac{1}{2}\Big)^m \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\Big(\frac{1}{2}\Big)^k \cdot 1^{m-k} = \Big(\frac{1}{2}\Big)^m\Big(1 + \frac{1}{2}\Big)^m = \Big(\frac{3}{4}\Big)^m.$$

Wir haben also eine geometrische Reihe vor uns; wegen $|\frac{3}{4}| < 1$ ist sie konvergent und hat den Wert

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{3}{4}\Big)^n = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 4\,.$$

Aufgabe 8

Nach Definition von e und σ_n gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$e - \sigma_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots\right)$$

$$< \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^k} \overset{\text{geom. Reihe}}{=} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} - 1\right) = \frac{1}{n!}\left(\frac{n+1}{n} - 1\right) = \frac{1}{n \cdot n!}\,;$$

damit ist die Abschätzung von σ_n nach unten gezeigt. Weiter gilt

$$e - \sigma_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} > \frac{1}{(n+1)!}\,,$$

womit auch die Abschätzung nach oben bewiesen ist.

Aufgabe 9 (P)

Zunächst betrachten wir den Fall $a = 0$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ müssen wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so finden, dass $|\frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant n_0$ gilt.
Sei also $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $a_n \to 0$ existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geqslant m\,. \tag{$*$}$$

Mit diesem festen m gilt dann

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} a_k \xrightarrow{n\to\infty} 0\,,$$

denn die hier auftretende Summe ist von n unabhängig. Aus dieser Konvergenz folgt wiederum, dass ein $n_1 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} a_k\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geqslant n_1\,. \tag{$**$}$$

Setzen wir $n_0 := \max\{m, n_1\}$, so gilt für alle $n \geqslant n_0$ wegen der Dreiecksungleichung

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} a_k\right| + \left|\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \leqslant \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} a_k\right| + \frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{n} |a_k|\,,$$

und wegen $n \geqslant n_1$ und $(**)$ sowie $n \geqslant m$ und $(*)$ folgt

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{n} \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Damit ist die Behauptung im Falle $a = 0$ bewiesen. Ist $a \neq 0$, dann betrachtet man die Folge $b_n := a - a_n$. Wegen $b_n \to 0$ folgt mit dem schon Bewiesenen

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k \xrightarrow{n\to\infty} 0\,,$$

und wegen

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a - a_k) = a - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

impliziert dies $\frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n) \to a$, so dass auch der allgemeine Fall erledigt ist.