Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2009/10
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 12. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{für } x \geqslant 0\,, \\ -x^3 & \text{für } x < 0\,. \end{cases}$$

Nach Beispiel (3) in 13.4 ist f auf $(0,\infty)$ differenzierbar mit $f'(x) = 3x^2$, $x > 0$. Ebenso ist f auf $(-\infty, 0)$ differenzierbar mit $f'(x) = -3x^2$, $x < 0$. Wegen

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^3}{x} = \lim_{x\to 0+} x^2 = 0$$

und

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{-x^3}{x} = \lim_{x\to 0-} -x^2 = 0$$

ist $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$, d.h. f ist in 0 differenzierbar mit $f'(0) = 0$.
Also ist f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{für } x \geqslant 0\,, \\ -3x^2 & \text{für } x < 0\,. \end{cases}$$

b) Setzt man $g(x) := x^x = e^{x\ln x}$, so ist $f(x) = x^{g(x)} = e^{g(x)\ln x}$ für jedes $x > 0$. Anwenden von Ketten- und Produktregel liefert zunächst

$$g'(x) = e^{x\ln x}(x\ln x)' = x^x(1\cdot \ln x + x\cdot x^{-1}) = (1+\ln x)x^x \qquad \text{für jedes } x > 0$$

und dann die Differenzierbarkeit von f auf ganz D mit

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{g(x)\ln x}\big(g(x)\ln x\big)' \\ &= x^{(x^x)}\big(g'(x)\ln x + g(x)x^{-1}\big) = x^{(x^x)}\big((1+\ln x)x^x \ln x + x^{x-1}\big)\,. \end{aligned}$$

c) Wegen $f(x) = (x^x)^x = x^{x\cdot x} = e^{x^2\ln x}$ liefert die Produkt- und Kettenregel die Differenzierbarkeit von f auf ganz D mit

$$f'(x) = e^{x^2\ln x}\big(2x\ln x + x^2\tfrac{1}{x}\big) = x^{(x^2)}x\big(2\ln x + 1\big) = x^{x^2+1}\big(2\ln x + 1\big)\,.$$

d) Als Komposition differenzierbarer Funktionen ist f auf D differenzierbar. Mit

$$f(x) = e^{(2^x)\cdot \ln x} + e^{x^2\cdot \ln x} + e^{(x^x)\cdot \ln 2} = e^{e^{x\cdot\ln 2}\cdot \ln x} + e^{x^2\cdot\ln x} + e^{e^{x\ln x}\cdot \ln 2}$$

folgt für jedes $x > 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{e^{x\cdot\ln 2}\cdot\ln x}\big(\ln 2\cdot e^{x\cdot \ln 2}\ln x + e^{x\cdot\ln 2}\tfrac{1}{x}\big) + e^{x^2\cdot\ln x}\big(2x\ln x + x^2\tfrac{1}{x}\big) + e^{e^{x\ln x}\cdot\ln 2}\big(e^{x\ln x}(1\cdot\ln x + x\tfrac{1}{x})\ln 2\big) \\ &= x^{(2^x)}2^x\big(\ln 2\cdot \ln x + \tfrac{1}{x}\big) + x^{(x^2)}x\big(2\ln x + 1\big) + 2^{(x^x)}x^x(1+\ln x)\ln 2\,. \end{aligned}$$

e) Mit der Produkt- und Kettenregel ergibt sich die Differenzierbarkeit von f auf ganz D sowie

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2+1)'e^{x^5} + (x^2+1)(e^{x^5})' \\ &= 2xe^{x^5} + (x^2+1)e^{x^5} \cdot 5x^4 = \big(5x^6 + 5x^4 + 2x\big)e^{x^5}. \end{aligned}$$

f) Auf $(-\frac{1}{2}, 1) \setminus \{0\}$ liefert die Produktregel die Differenzierbarkeit von f; es gilt

$$f'(x) = (x^2)'g(x) + x^2 g'(x) = 2xg(x) + x^2 g'(x) \qquad \text{für alle } x \in (-\tfrac{1}{2}, 1) \setminus \{0\}.$$

Auch in 0 ist f differenzierbar; es ergibt sich nämlich für $x \neq 0$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 g(x) - 0}{x} = xg(x) \xrightarrow{x \to 0} 0$$

wegen der Beschränktheit der Funktion g. Also ist $f'(0) = 0$.

Aufgabe 2

a) Mit Hilfe der Kettenregel erhält man für jedes $x \in (1, \infty)$

$$f'(x) = \ln'(\ln x) \cdot \ln'(x) = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}.$$

b) Anwendung der Produkt- und Kettenregel liefert für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = -2\sin(2x)\, e^{\sin x} + \cos(2x)\, e^{\sin x} \cos x = \big(\cos(2x)\, \cos x - 2\sin(2x)\big)\, e^{\sin x}.$$

c) Nach Definition gilt $f(x) = \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ für jedes $x \in \mathbb{R}$. Die Kettenregel liefert

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh(x) \qquad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}.$$

Ebenso sieht man $\sinh'(x) = \cosh(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

d) Wie in Aufgabe **2 d)** vom 10. Übungsblatt gesehen, gilt

$$\operatorname{Arsinh}(x) = \ln\big(x + \sqrt{x^2+1}\,\big) \qquad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}.$$

Damit ist Arsinh als Komposition differenzierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$\operatorname{Arsinh}'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x\right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \, \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Alternativ kann man Arsinh' auch mit Hilfe des Satzes über die Ableitung der Umkehrfunktion berechnen: Wegen $\sinh'(x) = \cosh(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\operatorname{Arsinh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\operatorname{Arsinh}'(x) = \frac{1}{\sinh'(\operatorname{Arsinh} x)} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{Arsinh} x)} \overset{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh(\operatorname{Arsinh} x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

In $(*)$ verwendeten wir $\cosh^2(y) - \sinh^2(y) = 1$ sowie $\cosh(y) > 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3

Für $x > 0$ gilt
$$f(x) = x^2 \sin\bigl(e^{\frac{1}{x}} - \ln(x^4)\bigr)\,.$$
Als Komposition differenzierbarer Funktionen ist f auf $(0, \infty)$ differenzierbar und für die Ableitung ergibt sich
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \sin\bigl(e^{\frac{1}{x}} - \ln(x^4)\bigr) + x^2 \cos\bigl(e^{\frac{1}{x}} - \ln(x^4)\bigr) \cdot \bigl(e^{\frac{1}{x}} \cdot (-\tfrac{1}{x^2}) - \tfrac{1}{x^4} \cdot 4x^3\bigr) \\ &= 2x \sin\bigl(e^{\frac{1}{x}} - \ln(x^4)\bigr) - \bigl(e^{\frac{1}{x}} + 4x\bigr) \cdot \cos\bigl(e^{\frac{1}{x}} - \ln(x^4)\bigr)\,, \qquad x > 0\,. \end{aligned}$$
Für $x < 0$ gilt
$$f(x) = x^2 \sin\bigl(e^{-\frac{1}{x}} - \ln(x^4)\bigr)\,.$$
Als Komposition differenzierbarer Funktionen ist f auf $(-\infty, 0)$ differenzierbar und für die Ableitung ergibt sich
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \sin\bigl(e^{-\frac{1}{x}} - \ln(x^4)\bigr) + x^2 \cos\bigl(e^{-\frac{1}{x}} - \ln(x^4)\bigr) \cdot \bigl(e^{-\frac{1}{x}} \cdot \tfrac{1}{x^2} - \tfrac{1}{x^4} \cdot 4x^3\bigr) \\ &= 2x \sin\bigl(e^{-\frac{1}{x}} - \ln(x^4)\bigr) + \bigl(e^{-\frac{1}{x}} - 4x\bigr) \cdot \cos\bigl(e^{-\frac{1}{x}} - \ln(x^4)\bigr)\,, \qquad x < 0\,. \end{aligned}$$
Außerdem gilt
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\bigl(e^{\frac{1}{|x|}} - \ln(x^4)\bigr) = 0\,,$$
weil $|\sin(e^{\frac{1}{|x|}} - \ln(x^4))| \leqslant 1$ für alle $x \neq 0$ ist. Damit ist f in 0 differenzierbar mit $f'(0) = 0$.

Aufgabe 4

Sei $k \in \mathbb{N}$ fest und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^k$. Wir zeigen zuerst für jedes $m \in \{1, 2, \ldots, k\}$
$$f^{(m)}(x) = \frac{k!}{(k-m)!}\, x^{k-m} \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{$*$}$$
Beweis durch Induktion:
IA: Für $m = 1$ ist $f'(x) = kx^{k-1} = \frac{k!}{(k-1)!}\, x^{k-1}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt.
IS: Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $m < k$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gelte $f^{(m)}(x) = \frac{k!}{(k-m)!}\, x^{k-m}$ (IV). Es folgt für jedes $x \in \mathbb{R}$
$$\begin{aligned} f^{(m+1)}(x) &= \bigl(f^{(m)}\bigr)'(x) \overset{\text{(IV)}}{=} \Bigl(\frac{k!}{(k-m)!}\, x^{k-m}\Bigr)' \\ &= \frac{k!}{(k-m)\cdot(k-m-1)!}\,(k-m)x^{k-m-1} = \frac{k!}{(k-(m+1))!}\, x^{k-(m+1)}\,. \end{aligned}$$
Insbesondere ergibt sich aus $(*)$: $f^{(k)}(x) = k!$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so dass die Funktion $f^{(k)}$ konstant ist. Daher gilt $f^{(m)}(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m > k$.
Nun sei $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ fest. Für die m-te Ableitung des Polynoms
$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$
erhalten wir nach unseren Vorüberlegungen
$$p^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{n} a_k\, \frac{k!}{(k-m)!}\, x^{k-m} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$
Insbesondere für $x = 0$ ergibt sich
$$p^{(m)}(0) = \sum_{k=m}^{n} a_k\, \frac{k!}{(k-m)!}\, 0^{k-m} = a_m\, m!\,,$$
woraus $a_m = \frac{1}{m!}\, p^{(m)}(0)$ folgt.

Aufgabe 5

Für jedes $x \in (0,\pi)$ gilt $\cos'(x) = -\sin x < 0$. Also ist cos auf $[0,\pi]$ streng monoton fallend. Wegen $|\cos x| \leqslant 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ haben wir $\cos([0,\pi]) \subset [-1,1]$. $\cos 0 = 1$ und $\cos\pi = -\cos 0 = -1$ sowie der Zwischenwertsatz garantieren auch die umgekehrte Inklusion $[-1,1] \subset \cos([0,\pi])$. Wegen $\cos'(x) = -\sin x \neq 0$ für alle $x \in (0,\pi)$ gilt für die Ableitung der Umkehrfunktion

$$\arccos'(y) = \frac{1}{\cos'(\arccos y)} = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2(\arccos y)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,, \qquad y \in (-1,1),$$

wobei wir $\cos'(x) = -\sin x = -\sqrt{1-\cos^2 x}$ für alle $x \in (0,\pi)$ ausgenutzt haben. In $y = \pm 1$ ist arccos nicht differenzierbar; die Funktion besitzt dort senkrechte Tangenten.

Aufgabe 6

a) Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ist tan nach der Quotientenregel differenzierbar mit

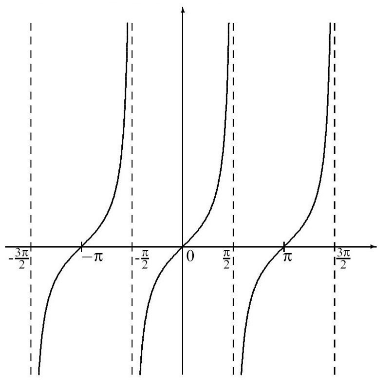
$$\begin{aligned}\tan'(x) = \Big(\frac{\sin x}{\cos x}\Big)' = \frac{\sin' x\,\cos x - \sin x\,\cos' x}{\cos^2 x} &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \Big(\frac{\sin x}{\cos x}\Big)^2 = 1 + \tan^2 x\,.\end{aligned}$$

Wegen $\tan'(x) > 0$ für alle $x \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ ist tan auf $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ streng monoton wachsend. Da tan auf $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ differenzierbar ist, ist tan auf $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ stetig. Mit dem Zwischenwertsatz ergibt sich $\tan((-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})) = \mathbb{R}$. Denn: Sei $y \in \mathbb{R}$ beliebig. Wegen $\tan x \to -\infty$ für $x \to -\frac{\pi}{2}+$ und $\tan x \to \infty$ für $x \to \frac{\pi}{2}-$ existieren $x_1, x_2 \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ mit $x_1 < x_2$ und $\tan(x_1) \leqslant y \leqslant \tan(x_2)$. Da tan auf $[x_1,x_2]$ stetig ist, gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $x_0 \in [x_1,x_2]$ mit $y = \tan(x_0)$, so dass $y \in \tan((-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}))$ ist. Da $y \in \mathbb{R}$ beliebig war, folgt $\mathbb{R} \subset \tan((-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}))$. Da offenkundig $\tan((-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})) \subset \mathbb{R}$ gilt, ist $\tan((-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})) = \mathbb{R}$ gezeigt.

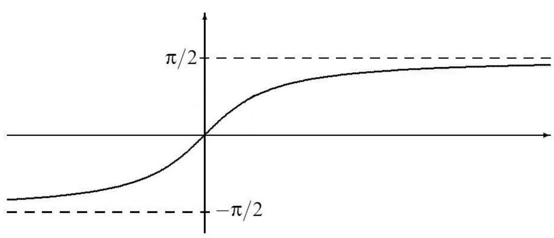
Die Umkehrfunktion $\arctan\colon \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ heißt *Arcustangens.* Es gilt $\arctan 0 = 0$, $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ und $\arctan(-x) = -\arctan x$ für alle $x \in \mathbb{R}$, weil tan eine ungerade Funktion ist.

Die Funktion $\tan\colon (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ ist bijektiv und stetig und es gilt $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x > 0$ für alle $x \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. Hiermit sind die Voraussetzungen des Satzes über die Ableitung der Umkehrfunktion erfüllt. Danach ist arctan auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und für jedes $y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(\arctan y)} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan y)} = \frac{1}{1+y^2}\,.$$



$\tan\colon \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$



$\arctan\colon \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

b) Nach der Kettenregel ist die Funktion f auf $(0,\infty)$ differenzierbar und für alle $x > 0$ gilt

$$f'(x) = \arctan'(x) + \arctan'(x^{-1})\cdot(-x^{-2}) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(x^{-1})^2}\cdot(-x^{-2}) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0\,.$$

Da die Ableitung von f auf $(0,\infty)$ verschwindet, ist f auf $(0,\infty)$ konstant. Für alle $x > 0$ gilt

$$f(x) = f(1) = 2\arctan(1) = 2\cdot\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\pi}{2}\,.$$

Aufgabe 7

a) Sowohl f als auch g sind stetig und auf einem abgeschlossenen, beschränkten Intervall definiert. Daher nehmen diese Funktionen ihr Maximum und Minimum an (vgl. Satz 7 in 10.4).

i) Die Funktion f ist auf dem gesamten Intervall $[-3,2]$ differenzierbar. In jeder Maximum- oder Minimumstelle im Innern des Intervalls verschwindet daher die Ableitung von f. Es gilt

$$f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2)\,.$$

Die Nullstellen von f' lauten 0 und $\pm\sqrt{2}$. Wir müssen neben diesen drei Stellen (die alle im Intervall $[-3,2]$ liegen!) auch die Ränder des Intervalls $[-3,2]$ untersuchen: $f(0) = 2$, $f(\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}) = -2$, $f(-3) = 47$, $f(2) = 2$. Das Maximum von f ist folglich 47, das Minimum ist -2.

ii) Die Funktion g ist außer in 3 differenzierbar. Wir müssen also die Randpunkte von $[0,10]$, den Punkt 3 sowie alle Punkte im Innern von $[0,10]\setminus\{3\}$ untersuchen, an denen die Ableitung von g verschwindet. Auf $[0,3]$ gilt

$$g(x) = -6x + (3 - x + 2)^2 = -6x + (5-x)^2 = x^2 - 16x + 25\,, \qquad \text{also } g'(x) = 2x - 16\,.$$

$g'(x) = 0$ gilt nur für $x = 8 \notin (0,3)$. Also hat g' in $(0,3)$ keine Nullstelle. Auf $[3,10]$ gilt

$$g(x) = -6x + (x-1)^2 = x^2 - 8x + 1\,, \qquad \text{also } g'(x) = 2x - 8\,.$$

$g'(x) = 0$ gilt nur für $x = 4 \in (3,10)$. Wir müssen also die Punkte $0, 3, 4, 10$ untersuchen: $g(0) = 25$, $g(3) = -14$, $g(4) = -15$, $g(10) = 21$. Damit ist -15 das Minimum und 25 das Maximum von g.

b) Wir untersuchen die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) := \sum_{k=1}^{n}(x - a_k)^2$ auf Extremstellen. Nach der Kettenregel ist f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} 2(x - a_k) = 2nx - 2\sum_{k=1}^{n} a_k\,.$$

Also ist

$$f'(x) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k =: x_0\,.$$

Für $x < x_0$ ist $f'(x) < 0$ (dort fällt f) und für $x > x_0$ ist $f'(x) > 0$ (dort wächst f), also ist x_0 die Stelle eines relativen Minimums von f. Wegen $f(x) \to \infty$ für $x \to \pm\infty$ nimmt die stetige Funktion f in x_0 ihr globales Minimum an. Deshalb ist $a = x_0 = \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)$, d.h. das anzugebende Messergebnis entspricht dem arithmetischen Mittel aller Messwerte.

Aufgabe 8 (P)

Die Idee ist zu schreiben

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}\,\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,.$$

Da man dabei eventuell durch Null dividiert, setzen wir

$$d : J \to \mathbb{R},\ d(y) := \begin{cases} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} & \text{für } y \neq y_0\,, \\ g'(y_0) & \text{für } y = y_0\,. \end{cases}$$

Da g differenzierbar in y_0 ist, gilt $d(y) \to g'(y_0) = d(y_0)$ für $y \to y_0$ (d.h. d ist stetig in y_0). Da f in x_0 differenzierbar ist, ist f stetig in x_0. Daher folgt $d(f(x)) \to g'(f(x_0)) = g'(y_0)$ für $x \to x_0$. Außerdem gilt $g(y) - g(y_0) = d(y)(y - y_0)$ für alle $y \in J$. Zusammen erhalten wir für $x \in I \setminus \{x_0\}$

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = d(f(x))\,\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \quad (x \to x_0),$$

d.h. $g \circ f$ ist in x_0 differenzierbar mit $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$. ("äußere Ableitung mal innere Ableitung")

Alternativ kann man die Kettenregel auch mit Hilfe von Satz 6 in 13.4 beweisen:
Da f in x_0 differenzierbar ist, gibt es eine in x_0 stetige Funktion $f^*\colon I \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f^*(x) \qquad \text{für alle } x \in I. \tag{$*$}$$

Dabei gilt $f^*(x_0) = f'(x_0)$. Da g in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar ist, existiert eine in $f(x_0)$ stetige Funktion $g^*\colon J \to \mathbb{R}$ mit

$$g(y) - g(f(x_0)) = (y - f(x_0))\, g^*(y) \qquad \text{für alle } y \in J. \tag{$**$}$$

Dabei gilt $g^*(f(x_0)) = g'(f(x_0))$. Es folgt für jedes $x \in I$ (wegen $f(x) \in J$ nach Voraussetzung)

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0) = g(f(x)) - g(f(x_0)) &\overset{(**)}{=} (f(x) - f(x_0))\, g^*(f(x)) \\ &\overset{(*)}{=} (x - x_0)f^*(x)\, g^*(f(x))\,.\end{aligned}$$

Da g^* in $f(x_0)$ und f in x_0 stetig sind, ist $g^* \circ f$ in x_0 stetig, außerdem ist f^* in x_0 stetig, so dass die Funktion $I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f^*(x)\, g^*(f(x))$ in x_0 stetig ist. Deshalb liefert Satz 6 b) in 13.4: $g \circ f$ ist in x_0 differenzierbar mit $(g \circ f)'(x_0) = f^*(x_0)\, g^*(f(x_0)) = f'(x_0)\, g'(f(x_0))$.