

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie
Lösungsvorschläge zum 14. Übungsblatt**

Aufgabe 1

- a) Die durch $f(x) := \ln(1+x)$ definierte Funktion $f: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ist beliebig oft differenzierbar. Wegen

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4},$$
$$f^{(5)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5}$$

sind

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = -1, \quad f'''(0) = 2, \quad f^{(4)}(0) = -6$$

und für das Taylorpolynom $T_4(f, 0)$ ergibt sich

$$T_4(f, 0)(x) = \sum_{k=0}^4 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x-0)^k = 0 + x + \frac{1}{2!} (-1)x^2 + \frac{1}{3!} 2x^3 + \frac{1}{4!} (-6)x^4$$
$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4.$$

Sei $x \geq 0$. Um die Abschätzung $0 \leq \ln(1+x) - T_4(f, 0)(x) \leq \frac{1}{5}x^5$ zu zeigen, verwenden wir den Satz von Taylor. Dieser besagt, dass es ein ξ zwischen 0 und x gibt mit

$$f(x) = T_4(f, 0)(x) + \frac{f^{(4+1)}(\xi)}{(4+1)!} (x-0)^{4+1},$$

also mit

$$f(x) - T_4(f, 0)(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} x^5.$$

Somit reicht es, die Abschätzung $0 \leq \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} x^5 \leq \frac{1}{5}x^5$ einzusehen. Diese ist erfüllt, denn:

$$\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} x^5 = \frac{1}{5!} \cdot \frac{24}{(1+\xi)^5} x^5 \geq 0,$$
$$\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} x^5 = \frac{1}{5!} \cdot \frac{24}{(1+\xi)^5} x^5 \leq \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(1+0)^5} x^5 = \frac{1}{5} x^5.$$

- b) Für die durch $f(x) := \ln(2+x)$ gegebene Funktion $f: (-2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, die beliebig oft differenzierbar ist, gilt

$$f'(x) = \frac{1}{2+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(2+x)^2}.$$

Also haben wir $f(0) = \ln 2$ und $f'(0) = \frac{1}{2}$. Nach dem Satz von Taylor gibt es zu jedem $x \in [-1, 1]$ ein ξ zwischen 0 und x mit

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2!} x^2 = \ln 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2(2+\xi)^2}.$$

Daher gilt wegen $\xi \in [-1, 1]$

$$\left| f(x) - \ln 2 - \frac{x}{2} \right| = \left| \frac{x^2}{2(2+\xi)^2} \right| \leq \frac{x^2}{2(2-1)^2} = \frac{x^2}{2}.$$

Wir können somit $a = \ln 2$ und $b = c = \frac{1}{2}$ wählen.

Aufgabe 2

Setze $f(x) := \frac{10}{7}\sqrt{1+x}$. Nach dem Satz von Taylor gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $\xi_n \in [-\frac{1}{50}, 0]$ mit

$$\sqrt{2} = f\left(-\frac{1}{50}\right) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \left(-\frac{1}{50}\right)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!} \left(-\frac{1}{50}\right)^{n+1}.$$

Jetzt wollen wir n so groß wählen, dass das Restglied $\frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!} \left(-\frac{1}{50}\right)^{n+1}$ betragsmäßig kleiner als 10^{-6} wird. Es zeigt sich, dass dies schon für $n = 2$ erfüllt ist; wegen

$$\left| \frac{1}{3!} \left(-\frac{1}{50}\right)^3 \right| = \frac{1}{6 \cdot 50^3} = \frac{8}{6 \cdot 100^3} = \frac{4 \cdot 10^{-6}}{3}$$

müssen wir nur noch $|f^{(3)}(\xi_2)| < \frac{3}{4}$ zeigen. Wir tun dies völlig ohne Taschenrechner, dessen Einsatz hier aber durchaus gestattet wäre: Mit $|\xi_2| \leq \frac{1}{50}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} |f^{(3)}(\xi_2)| &= \left| \frac{10}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (1+\xi_2)^{-5/2} \right| = \frac{15(1+\xi_2)^{-5/2}}{28} \\ &\leq \frac{15}{28} \left(\frac{49}{50}\right)^{-5/2} = \frac{15 \cdot \sqrt{50}^5}{28 \cdot 7^5} \leq \frac{15 \cdot 8 \cdot 50^2}{28 \cdot 7^5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5 \cdot 8 \cdot 50^2}{7^6}. \end{aligned}$$

Nun möchten wir $\frac{5 \cdot 8 \cdot 50^2}{7^6} < 1$ zeigen. Dies stimmt wegen

$$7^6 = 49^3 > 48^3 = (2^4 \cdot 3)^3 = 2^{12} \cdot 3^3 = 4096 \cdot 27 > 4000 \cdot 25 = 100\,000 = 5 \cdot 8 \cdot 50^2.$$

Als Näherung für $\sqrt{2}$ erhalten wir unter Verwendung von $f'(x) = \frac{10}{7} \cdot \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$ und $f''(x) = \frac{10}{7} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)(1+x)^{-3/2}$

$$\begin{aligned} f(0) + f'(0) \left(-\frac{1}{50}\right) + \frac{f''(0)}{2!} \left(-\frac{1}{50}\right)^2 &= \frac{10}{7} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{50}\right) - \frac{1}{8} \cdot \left(-\frac{1}{50}\right)^2\right) \\ &= \frac{10}{7} \left(1 - \frac{1}{100} - \frac{1}{20\,000}\right) = \frac{19\,799}{14\,000} \approx 1,414214. \end{aligned}$$

(Die Dezimalentwicklung hat dann doch der Taschenrechner geliefert ...)

Aufgabe 3

a) Für jedes $x \in (-1, 1)$ gilt

$$\begin{aligned} \arctan'(x) &= \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} \stackrel{|-x^2| < 1, \text{ geom. Reihe}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right)'. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + C, \quad x \in (-1, 1),$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$. Wegen $\arctan 0 = 0$ ergibt sich $C = 0$, also

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad x \in (-1, 1).$$

- b) Aus $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ und $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ folgt $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, also $\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$. Wegen $\frac{1}{\sqrt{3}} \in (-1, 1)$ ergibt sich nach a)

$$\frac{\pi}{6} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2k+1}}{2k+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} \cdot \frac{1}{5} - \frac{1}{3^3} \cdot \frac{1}{7} + \dots \right)$$

und somit

$$\pi = 2\sqrt{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k} \frac{1}{2k+1}.$$

Aufgabe 4

- a) Mit der aus der Vorlesung bekannten Reihenentwicklung von $\ln(1+y)$, $y \in (-1, 1)$, erhalten wir für jedes $x \in (-1, 1)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln((1-x)(1+x)) = \ln(1-x) + \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-x)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-1)^n + (-1)^{n+1}}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{-1 + (-1)^{n+1}}{n}}_{=: a_n} x^n. \end{aligned}$$

Nach Satz 3 in 14.3 ergibt sich

$$\begin{aligned} f^{(20)}(0) &= 20! a_{20} = 20! \frac{-1-1}{20} = -2 \cdot 19!, \\ f^{(31)}(0) &= 31! a_{31} = 0. \end{aligned}$$

Bemerkung: Natürlich kann man die Reihenentwicklung von $\ln(1+y)$ auch direkt auf f anwenden: Für jedes $x \in (-1, 1)$ gilt wegen $x^2 \in (-1, 1)$

$$f(x) = \ln(1-x^2) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(-x^2)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1) \frac{x^{2k}}{k} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{x^n}{n},$$

wobei

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 2k - 1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \\ -\frac{1}{k} & \text{falls } n = 2k \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ -\frac{2}{n} & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases} = a_n.$$

- b) Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$ gilt

$$f(x) = \frac{1}{2-x} + \frac{1}{3-x} = \frac{1}{1-(x-1)} + \frac{1}{2-(x-1)} = \frac{1}{1-(x-1)} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{1}{2}(x-1)}.$$

Gilt $|x-1| < 1$ und $|\frac{1}{2}(x-1)| < 1$, also $0 < x < 2$, so ergibt sich (geometrische Reihe!)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x-1)^k + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}(x-1)\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right) (x-1)^k.$$

Damit liefert Satz 3 in 14.3 für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{k!} f^{(k)}(1) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}.$$

Insbesondere ist

$$f^{(2010)}(1) = 2010! \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2011}\right).$$

Aufgabe 5

Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ setze $a_n := \frac{(-1)^n}{n^2 - n}$. Wegen

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{(n+1)^2 - (n+1)}{n^2 - n} = \frac{(1 + 1/n)^2 - (1/n + 1/n^2)}{1 - 1/n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

besitzt die gegebene Potenzreihe den Konvergenzradius 1, so dass die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ konvergiert. Damit ist die Funktion $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$ wohldefiniert. Nach Satz 3 in 14.3 gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n x^{n-1}}{n^2 - n} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}.$$

Wie in der Vorlesung gesehen, stellt diese Potenzreihe die Funktion $(-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(1+x)$ dar, d. h. es ist $f'(x) = \ln(1+x)$. Aufgrund von $(y \ln y - y)' = \ln y$ für $y > 0$ folgt

$$f(x) = (1+x) \ln(1+x) - (1+x) + c \quad \text{für } |x| < 1$$

mit einem $c \in \mathbb{R}$. Wegen $f(0) = 0$ ergibt sich $c = 1$. Somit erhält man als Endergebnis

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n-2}}{n^2 - n} = (1+x) \ln(1+x) - x \quad \text{für } |x| < 1.$$

Aufgabe 6

Wir nutzen das Wurzelkriterium: Wegen

$$\sqrt[n]{|n(n+3)e^{nx}|} = \sqrt[n]{n(n+3)} e^x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^x$$

gilt: Für $e^x < 1$ konvergiert die Reihe, für $e^x > 1$ divergiert sie. Das bedeutet: Für $x < 0$ liegt Konvergenz, für $x > 0$ Divergenz vor. Für $x = 0$ divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+3) \cdot 1$, da $n(n+3) \rightarrow 0$. Insgesamt: Genau für $x < 0$ konvergiert die Reihe.

Nun sei $x < 0$. Wir setzen $y := e^x$ und wollen

$$f(y) := \sum_{n=1}^{\infty} n(n+3)y^n = y \sum_{n=1}^{\infty} n(n+3)y^{n-1}$$

berechnen. Offenbar besitzt $g(y) := f(y)/y$ die Stammfunktion

$$G(y) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+3)y^n = \frac{1}{y^2} \sum_{n=1}^{\infty} (n+3)y^{n+2}.$$

Nun hat wiederum $h(y) := y^2 G(y)$ die Stammfunktion

$$H(y) = \sum_{n=1}^{\infty} y^{n+3} \stackrel{k:=n-1}{=} y^4 \sum_{k=0}^{\infty} y^k \stackrel{|y|<1}{=} \frac{y^4}{1-y}.$$

Daraus ergibt sich

$$h(y) = H'(y) = \frac{4y^3(1-y) + y^4}{(1-y)^2} = \frac{4y^3 - 3y^4}{(1-y)^2}, \quad G(y) = \frac{h(y)}{y^2} = \frac{4y - 3y^2}{(1-y)^2}.$$

Also ist

$$g(y) = G'(y) = \frac{(4-6y)(1-y)^2 + (4y-3y^2)2(1-y)}{(1-y)^4} = \frac{4-2y}{(1-y)^3}.$$

Schließlich ergibt sich dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+3)e^{nx} = f(y) = yg(y) = \frac{4y - 2y^2}{(1-y)^3} = \frac{4e^x - 2e^{2x}}{(1-e^x)^3}.$$

Aufgabe 7

Wir nehmen an, es gelte $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Eine Potenzreihe dürfen wir im Inneren ihres Konvergenzintervalls nach Satz 3 in 14.3 gliedweise differenzieren, es gilt also

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n.$$

Dies soll für alle $x \in \mathbb{R}$ übereinstimmen mit

$$-\omega^2 y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} -\omega^2 a_n x^n.$$

Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen ist die Gleichung $y'' = -\omega^2 y$ also genau dann erfüllt, wenn

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = -\omega^2 a_n \quad \text{für alle } n \geq 0 \quad (*)$$

gilt. Die Forderungen $y(0) = y_0$ und $y'(0) = 0$ bedeuten $a_0 = y_0$ und $a_1 = 0$. Induktiv folgt dann aus (*)

$$a_{2n+1} = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad a_{2n} = y_0 \omega^{2n} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Diese Potenzreihe stellt die Funktion $y(x) = y_0 \cos(\omega x)$ dar.

Aufgabe 8 (P)

- a) Wir berechnen zunächst die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $y'' - 5y' + 4y = 0$. Dazu machen wir den Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$. Dann ist $y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$, $y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$ und

$$y'' - 5y' + 4y = (\lambda^2 - 5\lambda + 4)e^{\lambda x} \stackrel{!}{=} 0.$$

Da das Polynom $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 4)$ die Nullstellen 1 und 4 hat, lautet die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $y'' - 5y' + 4y = 0$

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{4x} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

Für eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung $y'' - 5y' + 4y = e^{2x}$ machen wir den Ansatz $y_p(x) = C e^{2x}$. Dann ist $y_p'(x) = 2C e^{2x}$ und $y_p''(x) = 4C e^{2x}$, also

$$y_p'' - 5y_p' + 4y_p = 4C e^{2x} - 10C e^{2x} + 4C e^{2x} = -2C e^{2x}.$$

Damit dies $= e^{2x}$ wird, muss $C = -\frac{1}{2}$ gewählt werden. Es folgt $y_p(x) = -\frac{1}{2} e^{2x}$.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist die Summe einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung, also

$$y(x) = -\frac{1}{2} e^{2x} + C_1 e^x + C_2 e^{4x} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

Aus $y(0) = 1$ folgt $-\frac{1}{2} + C_1 + C_2 = 1$ und aus $y'(0) = -1$ folgt $-1 + C_1 + 4C_2 = -1$. Ziehen wir die zweite Gleichung von der ersten ab, folgt $-3C_2 = \frac{3}{2}$, also $C_2 = -\frac{1}{2}$ und damit $C_1 = 2$. Die (eindeutige) Lösung des Anfangswertproblems lautet daher

$$y(x) = -\frac{1}{2} e^{2x} + 2e^x - \frac{1}{2} e^{4x}.$$

b) Wir lösen zuerst die homogene Gleichung

$$v'(t) + \gamma v(t) = 0.$$

Diese besitzt die Lösungen $v(t) = Ce^{A(t)}$, wobei $C \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante und A irgendeine Stammfunktion von $a(t) := -\gamma$ ist. Dies bedeutet für $t \in \mathbb{R}$

$$v(t) = Ce^{-\gamma t} \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Eine spezielle Lösung v_p der inhomogenen Gleichung $v'(t) + \gamma v(t) = g$ verschaffen wir uns mit der Methode der Variation der Konstanten: Wir machen den Ansatz $v_p(t) = C(t)v_h(t)$ mit $v_h(t) := e^{-\gamma t}$ und erhalten

$$\begin{aligned} v_p'(t) + \gamma v_p(t) &= C'(t)v_h(t) + C(t)v_h'(t) + \gamma C(t)v_h(t) \\ &= C'(t)v_h(t) + (v_h'(t) + \gamma v_h(t))C(t) = C'(t)v_h(t). \end{aligned}$$

Hierbei haben wir benutzt, dass v_h die homogene Gleichung löst. Damit v_p die inhomogene Gleichung löst, muss mithin $C'(t)v_h(t) = g$ sein, d. h. es muss

$$C'(t) = g/v_h(t) = ge^{\gamma t}$$

gelten. Dies ist z.B. für $C(t) = \frac{g}{\gamma}e^{\gamma t}$ der Fall, so dass sich $v_p(t) = \frac{g}{\gamma}$ ergibt.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist die Summe einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung, also

$$v(t) = v_p(t) + Cv_h(t) = \frac{g}{\gamma} + Ce^{-\gamma t} \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Speziell für $t = 0$ erhalten wir $v(0) = \frac{g}{\gamma} + C$. Daher ist die Anfangsbedingung $v(0) = v_0$ genau für $C = v_0 - \frac{g}{\gamma}$ erfüllt. Somit lautet die gesuchte Lösung

$$v(t) = \frac{g}{\gamma} + (v_0 - \frac{g}{\gamma})e^{-\gamma t}.$$