KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) WS 2010/11
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. T. Gauss

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 1

Aus der Definition der Betragsfunktion folgt

$$h(x) = \frac{x}{1+|x|} = \begin{cases} \dfrac{x}{1+x} = \quad 1 - \dfrac{1}{1+x} & \text{für } x \geqslant 0 \\ \dfrac{x}{1-x} = -1 + \dfrac{1}{1-x} & \text{für } x < 0 \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

a) Monotonie: Beh.: h ist eine streng monoton wachsende Funktion.

Zum Nachweis müssen wir zeigen: Ist $x_1 < x_2$, dann folgt $h(x_1) < h(x_2)$.

Sei also $x_1 < x_2$. Wir unterscheiden folgende Fälle:

1. Fall: $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 \quad &\Rightarrow \quad 1 - x_2 < 1 - x_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1-x_1} < \frac{1}{1-x_2} \\ &\Rightarrow \quad -1 + \frac{1}{1-x_1} < -1 + \frac{1}{1-x_2} \quad \Rightarrow \quad h(x_1) < h(x_2)\,. \end{aligned}$$

2. Fall: $x_1, x_2 \in [0, \infty)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 \quad &\Rightarrow \quad 1 + x_1 < 1 + x_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1+x_2} < \frac{1}{1+x_1} \\ &\Rightarrow \quad -\frac{1}{1+x_1} < -\frac{1}{1+x_2} \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{1}{1+x_1} < 1 - \frac{1}{1+x_2} \\ &\Rightarrow \quad h(x_1) < h(x_2)\,. \end{aligned}$$

3. Fall: $x_1 \in (-\infty, 0)$ und $x_2 \in [0, \infty)$. Aus der Definition von h lesen wir direkt ab, dass dann $h(x_1) < 0$ und $h(x_2) \geqslant 0$ gilt. Daraus folgt sofort $h(x_1) < h(x_2)$.

Einer der obigen Fälle tritt immer ein; wir haben also gezeigt, daß jedenfalls $h(x_1) < h(x_2)$ folgt.

Also ist die Funktion h streng monoton wachsend.

Beschränktheit: Beh.: Es gilt $|h(x)| < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ ergibt sich nämlich

$$|h(x)| = \frac{|x|}{|1+|x||} = \frac{|x|}{1+|x|} < 1,$$

denn

$$0 < 1 \quad \Rightarrow \quad |x| < 1 + |x| \quad \overset{1+|x|>0}{\Rightarrow} \quad \frac{|x|}{1+|x|} < 1.$$

Injektivität: Direkt aus der strengen Monotonie folgt, dass h injektiv ist.

Bildbereich: Beh.: $h(\mathbb{R}) = (-1, 1)$. Zunächst stellen wir fest, dass wegen $|h(x)| < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ die Inklusion $h(\mathbb{R}) \subset (-1, 1)$ gilt. Um $(-1, 1) \subset h(\mathbb{R})$ zu zeigen, müssen wir zu jedem $y \in (-1, 1)$ ein $x \in \mathbb{R}$ finden mit $y = h(x)$. Sei dazu $y \in (-1, 1)$ beliebig.

1. Fall: $y \in (-1, 0)$. Definiere $x := \frac{y}{1-|y|} = \frac{y}{1+y}$. Dann ist $x < 0$ und es gilt

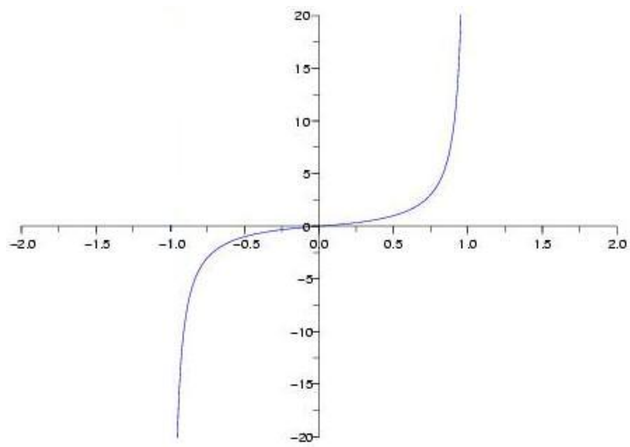
$$f(x) = f(\frac{y}{1+y}) = -1 + \frac{1}{1 - \frac{y}{1+y}} = -1 + \frac{1+y}{1+y-y} = y\,.$$

2. Fall: $y \in [0, 1)$. Definiere $x := \frac{y}{1-|y|} = \frac{y}{1-y}$. Dann ist $x \geqslant 0$ und es gilt

$$f(x) = f(\frac{y}{1-y}) = 1 - \frac{1}{1 + \frac{y}{1-y}} = 1 - \frac{1-y}{1-y+y} = y\,.$$

Hiermit ist $h(\mathbb{R}) = (-1, 1)$ gezeigt. *Bemerkungen:*

1. In Kürze werden wir Methoden behandeln, mit denen wir den Verlauf des Funktionsgraphen diskutieren können. Dann werden wir einsehen, dass das zugehörige Schaubild in etwa wie folgt aussieht:



2. Die Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist nicht surjektiv (z. B. $2 \notin h(\mathbb{R})$). Betrachtet man anstelle von h die durch

$$g\colon \mathbb{R} \to (-1, 1)\,, \quad g(x) := h(x)$$

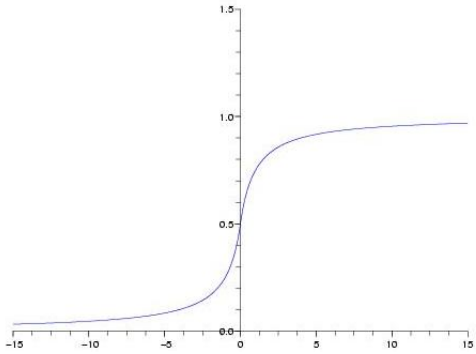
definierte Funktion g, dann ist g surjektiv und injektiv, d. h. bijektiv. Daher existiert die Umkehrfunktion von g. Der Berechung des Bildbereichs von h können wir entnehmen, dass diese durch

$$g^{-1}\colon (-1, 1) \to \mathbb{R}\,, \quad g^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}$$

gegeben ist.

b) Aus (der Bemerkung zu) Teil a) wissen wir, dass die Funktion g, die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ auf $(-1, 1)$ bijektiv abbildet. Wir suchen nun eine Funktion f, die $(-1, 1)$ auf $(0, 1)$ bijektiv abbildet: Nach Aufgabe 3a) vom 2. Übungsblatt (mit $a = -1, b = 1$) ist $[-1, 1] \to [0, 1], y \mapsto \frac{y-(-1)}{1-(-1)} = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$ bijektiv, also leistet $f\colon (-1, 1) \to (0, 1)$, $f(y) = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$ das Gewünschte. Eine bijektive Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $(0, 1)$ ist dann durch die Komposition $f \circ g\colon \mathbb{R} \to (0, 1)$ gegeben:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\frac{x}{1+|x|}) = \frac{1}{2}\frac{x}{1+|x|} + \frac{1}{2} \qquad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}.$$



Bemerkung:

Da bijektive Abbildungen von $(0,1)$ nach $\mathbb{R}$ und von $(-1,1)$ nach $\mathbb{R}$ existieren, besitzen die Intervalle $(0,1)$ bzw. $(-1,1)$ die gleiche Mächtigkeit wie $\mathbb{R}$. Mit Hilfe der Aufgabe 3 vom 2. Übungsblatt kann man sich überlegen, dass man jedes Intervall der Form (c,d), wobei $c,d \in \mathbb{R}$ mit $c < d$, auf $\mathbb{R}$ bijektiv abbilden kann.

Aufgabe 2

a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt unter Verwendung von $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = 2\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)(n+1) = (n+1)^2.$$

b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} j \cdot (n-k) &= \left(\sum_{j=1}^{n} j\right)\left(\sum_{k=1}^{n}(n-k)\right) \overset{l:=n-k}{=} \frac{1}{2}n(n+1)\sum_{l=0}^{n-1} l \\ &= \frac{1}{2}n(n+1)\,\frac{1}{2}(n-1)n = \frac{1}{4}n^2(n^2-1).\end{aligned}$$

c) Es sind $\sum_{k=2}^{2} \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{3}$ und $\sum_{k=2}^{3} \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{11}{24}$. Für $n \geqslant 4$ erhalten wir laut Hinweis

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} &= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\Big(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\Big) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k+1}\right) \\ &\overset{*}{=} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{k+1} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &\overset{j:=k-2}{=} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \sum_{j=2}^{n-2}\frac{1}{j+1} - \sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{k+1} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2}\,.\end{aligned}$$

$*$) *Hinweis:* Dieses “Abspalten„ der ersten beiden bzw. der letzten beiden Summanden ist so nur möglich, wenn die Summe auch tatsächlich aus mindestens zwei Summanden besteht. Deshalb wurden die Fälle, bei denen dies nicht so ist ($n = 2$, $n = 3$), getrennt behandelt.

d) Für $n \geqslant 2$ ist

$$\begin{aligned}\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=2}^{n}\frac{(k+1)(k-1)}{k^2} = \frac{\prod_{k=2}^{n}(k+1)\cdot\prod_{k=2}^{n}(k-1)}{\prod_{k=2}^{n}k^2} \\ &= \frac{\prod_{j=3}^{n+1} j \cdot \prod_{m=1}^{n-1} m}{(\prod_{k=2}^{n} k)^2} = \frac{\frac{1}{2}(n+1)!\cdot(n-1)!}{(n!)^2} = \frac{\frac{1}{2}(n+1)\cdot 1}{n} = \frac{n+1}{2n}\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 3

a) Beweis durch vollständige Induktion:

IA: Wegen $\sum_{k=1}^{1} k \cdot k! = 1 \cdot 1! = 1$ und $(1+1)! - 1 = 1$ ist die Behauptung für $n = 1$ wahr.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$. Für dieses n gelte $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$ (IV). Dann folgt $\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! = \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! + (n+1)(n+1)! \overset{\text{IV}}{=} (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! = (n+1)!(1 + (n+1)) - 1 = (n+2)! - 1$. Also gilt die Behauptung dann auch für $n+1$.

Bemerkung: Alternativ kann man die Behauptung auch durch Überführung in eine Teleskopsumme direkt nachrechnen: Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = \sum_{k=1}^{n} (k+1-1) \cdot k! = \sum_{k=1}^{n} \big((k+1)! - k!\big) = \sum_{k=1}^{n} (k+1)! - \sum_{k=1}^{n} k!$$
$$= (n+1)! + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)! - (1 + \sum_{k=2}^{n} k!) = (n+1)! - 1.$$

b) Beweis durch vollständige Induktion:

IA: Wegen $\sum_{k=1}^{2} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ und $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{1+k} = \frac{1}{2}$ ist $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ für $n = 1$ richtig.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$. Für dieses n gelte $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ (IV). Dann folgt

$$\sum_{k=1}^{2(n+1)} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \overset{\text{IV}}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{n+(n+1)} - \frac{1}{2n+2}$$
$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k} - \frac{1}{2n+2} \overset{j:=k-1}{=} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{n+(1+j)} - \frac{1}{2n+2}$$
$$= \frac{1}{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(n+1)+j} - \frac{1}{2n+2} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(n+1)+j} + \frac{2-1}{2n+2} = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{(n+1)+j}.$$

c) Wir verwenden wieder vollständige Induktion.

IA: Für $n = 1$ hat die Summe genau einen Summanden und ergibt 1; dies ist größer als $\frac{1}{2}$.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$. Für dieses n sei $\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} > \frac{n}{2}$ erfüllt (IV). Dann folgt

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} \overset{\text{IV}}{>} \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{n}{2} + \frac{2^{n+1} - 1 - 2^n + 1}{2^{n+1}} = \frac{n+1}{2}.$$

(Bei der Abschätzung wurde außer IV noch benutzt, dass $2^{n+1} > k$, also $1/k > 1/2^{n+1}$, für alle $k \in \{2^n, \ldots, 2^{n+1} - 1\}$ gilt.)

d) IA: Für $n = 1$ stimmt die behauptete Aussage, denn $6^1 - 5 \cdot 1 + 4 = 5$ ist durch 5 teilbar.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte die Behauptung, sei also $6^n - 5n + 4$ durch 5 teilbar, etwa $6^n - 5n + 4 = 5l$ für ein $l \in \mathbb{Z}$. (IV)

Zu zeigen ist, dass dann auch $6^{n+1} - 5(n+1) + 4$ durch 5 teilbar ist. Es gilt:

$$6^{n+1} - 5(n+1) + 4 = 6 \cdot 6^n - 5n - 5 + 4 = 6\big(6^n - 5n + 4\big) + 25n - 25$$
$$\overset{\text{IV}}{=} 6 \cdot 5l + 25n - 25 = (\underbrace{6 \cdot l + 5n - 5}_{\in \mathbb{Z}}) \cdot 5.$$

e) IA: Für $n = 5$ gilt $2^n = 2^5 = 32$ und $n^2 = 5^2 = 25$. Also ist die behauptete Ungleichung für $n = 5$ wahr.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 5$ beliebig. Für dieses n gelte $2^n > n^2$ (IV). Dann folgt

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \overset{\text{IV}}{>} 2 \cdot n^2.$$

Zu zeigen verbleibt: $2n^2 \geqslant (n+1)^2 \ \Leftrightarrow\ 2n^2 \geqslant n^2 + 2n + 1 \ \Leftrightarrow\ n^2 \geqslant 2n + 1$. Die Gültigkeit der letzten Ungleichung sehen wir folgendermaßen

$$n \geqslant 5 \ \Rightarrow\ n \geqslant 3 \ \Rightarrow\ n^2 \geqslant 3n \ \Rightarrow\ n^2 \geqslant 2n + n \ \Rightarrow\ n^2 \geqslant 2n + 1\,.$$

f) IA: Für $n = 2$ ist $\prod_{k=1}^{2-1}(1+\frac{1}{k})^k = (1+\frac{1}{1})^1 = 2 = \frac{2^2}{2!}$.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$ beliebig. Für dieses n gelte $\prod_{k=1}^{n-1}(1+\frac{1}{k})^k = \frac{n^n}{n!}$ (IV). Dann gilt:

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{(n+1)-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k &= \left(\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \overset{\text{IV}}{=} \frac{n^n}{n!}\cdot\left(\frac{n}{n}+\frac{1}{n}\right)^n \\ &= \frac{n^n}{n!}\cdot\frac{(n+1)^n}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n!}\cdot\frac{n+1}{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig. Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$.

Wir erbringen den Beweis mittels vollständiger Induktion nach $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

IA: Für $n = 0$ steht links $(a+b)^0 = 1$ und rechts

$$\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}a^k b^{0-k} = \binom{0}{0}a^0 b^0 = 1.$$

Also ist die Formel für $n = 0$ richtig. (Man beachte $\binom{0}{0} = 1$ und $0^0 = 1$.)

IS: Sei $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ beliebig. Es gelte $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$ (IV). Dann folgt

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \overset{\text{IV}}{=} (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}a^j b^{n+1-j} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} \\ &= \binom{n}{n}a^{n+1}b^0 + \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j-1}a^j b^{n+1-j} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0}a^0 b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right]a^k b^{n+1-k} + b^{n+1}\end{aligned}$$

und mit $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{n+1-k}{n+1-k} + \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!}\frac{k}{k} = \frac{(n+1-k+k)n!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}&= \binom{n+1}{n+1}a^{n+1}b^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{0}a^0 b^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}.\end{aligned}$$

In $(*)$ führten wir bei der ersten Summe die Indexverschiebung $j := k+1$ durch.

b) **i)** Es ist

$$\sum_{j=0}^{16}\binom{16}{j}(-1)^j 3^{j+1} = 3\sum_{j=0}^{16}\binom{16}{j}(-3)^j 1^{16-j} = 3(-3+1)^{16} = 3\cdot 65536 = 196608.$$

ii) Sei $n \in \mathbb{N}$. Nach Definition der Binomialkoeffizienten gilt für jedes $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$k\binom{n}{k} = k\cdot\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} = n\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,((n-1)-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Daher liefert der binomische Lehrsatz

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} \overset{j:=k-1}{=} n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\cdot 1^j\cdot 1^{(n-1)-j} = n\cdot(1+1)^{n-1} = n\cdot 2^{n-1}.$$

iii) Mit der gleichen Umformung wie in **ii)** erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k n\binom{n-1}{k-1} = -n\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}\\ &\overset{j:=k-1}{=} -n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\cdot(-1)^j\cdot 1^{(n-1)-j}\\ &= -n(1-1)^{n-1} = -n\cdot 0^{n-1} = \begin{cases} -1 & \text{für } n=1\,,\\ 0 & \text{für } n>1\,.\end{cases}\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Sei $n \in \mathbb{N}$. Zuerst berechnen wir den Wert der Teleskopsumme analog zu Blatt 3, Aufgabe 6:

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2-(k-1)^2) - (1-1)^2 + n^2 = n^2.$$

Andererseits ist

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2-(k-1)^2) = \sum_{k=1}^{n}(k^2-(k^2-2k+1)) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{n}k - \sum_{k=1}^{n}1 = 2\sum_{k=1}^{n}k - n$$

bzw. äquivalent hierzu

$$\sum_{k=1}^{n}k = \frac{1}{2}\left(n + \sum_{k=1}^{n}(k^2-(k-1)^2)\right).$$

Einsetzen von $\sum_{k=1}^{n}(k^2-(k-1)^2) = n^2$ ergibt

$$\sum_{k=1}^{n}k = \frac{1}{2}(n+n^2) = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Zur Berechnung von $\sum_{k=1}^{n}k^2$ betrachten wir die Teleskopsumme $\sum_{k=1}^{n}(k^3-(k-1)^3)$. Wie zuvor sehen wir $\sum_{k=1}^{n}(k^3-(k-1)^3) = n^3$. Außerdem gilt

$$\sum_{k=1}^{n}(k^3-(k-1)^3) = \sum_{k=1}^{n}(k^3-(k^3-3k^2+3k-1)) = \sum_{k=1}^{n}(3k^2-3k+1) = 3\sum_{k=1}^{n}k^2 - 3\sum_{k=1}^{n}k + n$$

und damit

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n}(k^3-(k-1)^3) + 3\sum_{k=1}^{n} k - n = n^3 + 3\cdot\frac{1}{2}n(n+1) - n$$
$$= \frac{1}{2}n(2n^2+3n+3-2) = \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1).$$

Hieraus folgt

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Aufgabe 6

Wir beginnen damit, einige a_n zu berechnen:

$$a_3 = \frac{(3-1)^2(3-2)^2}{3^2}\cdot\frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{9}, \qquad a_4 = \frac{3^2 2^2}{4^2}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

Es scheint $a_n = 1/n^2$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ zu gelten. Wir bestätigen dies mit vollständiger Induktion:
Induktionsanfang: Für $n = 1$ und $n = 2$ stimmt dies offenbar.
Induktionsschluss: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$. Für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ gelte $a_k = 1/k^2$ (IV).
(Man beachte: Als Induktionsvoraussetzung reicht hier nicht, dass die Formel nur für n gilt, sondern auch für $n-1$, weil man im Induktionsschluss auf Informationen über a_n und a_{n-1} zurückgreift.)
Dann folgt

$$a_{n+1} = \frac{n^2(n-1)^2}{(n+1)^2}\cdot a_n\cdot a_{n-1} = \frac{n^2(n-1)^2}{(n+1)^2}\cdot\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{(n-1)^2} = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Aufgabe 7

a) Es gilt: $z^3 = (3-i)^3 = (3-i)(9-6i+i^2) = (3-i)(8-6i) = 24-18i-8i+6i^2 = 18-26i$. Folglich hat z^3 den Realteil 18 und den Imaginärteil -26. Ferner ist $|z^3| = \sqrt{18^2+(-26)^2} = \sqrt{1000} = 10\sqrt{10}$. Alternativ kann man $|z^3|$ auch berechnen, ohne z^3 bestimmt zu haben: $|z^3| = |z|^3 = \sqrt{3^2+(-1)^2}^3 = \sqrt{10}^3 = 10\sqrt{10}$.

b) Wir erweitern den Bruch geeignet (Standardtrick: $z\bar{z}$ ist reell, daher ergibt $1/z = 1/z\cdot\bar{z}/\bar{z} = \bar{z}/(z\bar{z})$ einen reellen Nenner):

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{3-i} = \frac{1}{3-i}\cdot\frac{3+i}{3+i} = \frac{3+i}{3^2-i^2} = \frac{3+i}{10} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}i.$$

Also hat $1/z$ den Realteil $\frac{3}{10}$ und den Imaginärteil $\frac{1}{10}$. Der Betrag von $1/z$ ist $|1/z| = \sqrt{\frac{9}{100}+\frac{1}{100}} = \sqrt{1/10} = \sqrt{10}/10$, alternativ: $|1/z| = 1/|z| = 1/\sqrt{10} = \sqrt{10}/10$.

c) Es ergibt sich $z\cdot w = (3-i)(-1+2i) = -3+6i+i-2i^2 = -1+7i$. Also hat $z\cdot w$ Realteil -1 und Imaginärteil 7. Außerdem gilt $|z\cdot w| = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} = |z|\cdot|w|$.

d) Es ist $\overline{z}^2 = \left(\overline{3-i}\right)^2 = (3+i)^2 = 9+6i+i^2 = 8+6i$ und wegen $w^2 = (-1+2i)^2 = 1-4i+4i^2 = -3-4i$ ergibt sich

$$\frac{1}{w^2} = \frac{1}{-3-4i}\cdot\frac{-3+4i}{-3+4i} = \frac{-3+4i}{9-16i^2} = \frac{-3+4i}{25} = -\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i.$$

$\overline{z}^2 + 1/w^2 = (8+6i) + (-\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i)$ hat somit Realteil $8-\frac{3}{25} = \frac{197}{25}$ und Imaginärteil $6+\frac{4}{25} = \frac{154}{25}$. Der Betrag von $\overline{z}^2 + 1/w^2$ lautet $|\overline{z}^2 + 1/w^2| = \sqrt{197^2+154^2}/25 = \sqrt{2501}/5$.

Aufgabe 8

a) Es gilt $z^2 - 2z + 3 = (z-1)^2 + 2$. Die Gleichung $z^2 - 2z + 3 = 0$ ist also genau dann erfüllt, wenn $(z-1)^2 = -2$. Dies bedeutet $z - 1 = i\sqrt{2}$ oder $z - 1 = -i\sqrt{2}$, also hat die Gleichung die zwei Lösungen $z_1 = 1 + i\sqrt{2}$ und $z_2 = 1 - i\sqrt{2}$.

b) Mit dem Ansatz $z = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) erhalten wir

$$\begin{aligned} z^2 = |z|^2 \quad &\Leftrightarrow \quad a^2 + 2aib + (ib)^2 = a^2 + b^2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + 2aib - b^2 = a^2 + b^2 \\ &\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \quad a^2 - b^2 = a^2 + b^2 \text{ und } 2ab = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -2b^2 = 0 \text{ und } \big(a = 0 \text{ oder } b = 0\big) \\ &\Leftrightarrow \quad b = 0 \text{ und } \big(a = 0 \text{ oder } b = 0\big) \\ &\Leftrightarrow \quad b = 0. \end{aligned}$$

[In $(*)$ verwenden wir, dass zwei komplexe Zahlen genau dann gleich sind, wenn sie den selben Real- und Imaginärteil besitzen.]
Also ist $z^2 = |z|^2$ genau dann erfüllt, wenn $\mathrm{Im}(z) = 0$ bzw. $z \in \mathbb{R}$ ist.

c) Aufgrund des Hinweises machen wir den Ansatz $z = x(1+i)$ mit $x \in \mathbb{R}$. Es ergibt sich

$$x^3(1+i)^3 - (3-i)x^2(1+i)^2 - ix(1+i) + 1 + 3i = 0.$$

Wegen $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$ und $(1+i)^3 = 2i(1+i) = -2 + 2i$ führt dies zu der Gleichung

$$x^3(-2+2i) + x^2(-2-6i) + x(1-i) + 1 + 3i = 0$$

und die Aufspaltung in Real- und Imaginärteil liefert (Man beachte $x \in \mathbb{R}$.)

$$-2x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0 \qquad \text{und} \qquad 2x^3 - 6x^2 - x + 3 = 0.$$

Addieren dieser Gleichungen liefert $-8x^2 + 4 = 0$, also $x^2 = \frac{1}{2}$, d. h. $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ oder $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Durch Einsetzen überzeugt man sich, dass dies tatsächlich Lösungen beider Gleichungen sind. Damit haben wir zwei Lösungen unserer ursprünglichen Gleichung gefunden:

$$z_1 := \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(1+i) \quad \text{und} \quad z_2 := -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}(1+i).$$

Es gilt $(z - z_1)(z - z_2) = (z - z_1)(z + z_1) = z^2 - z_1^2 = z^2 - i$. Für $z \neq z_1$ und $z \neq z_2$ dividieren wir die ursprüngliche Gleichung durch $z^2 - i$ (Polynomdivision) und erhalten

$$0 = \frac{z^3 - (3-i)z^2 - iz + 1 + 3i}{z^2 - i} = z - (3 - i).$$

Eine dritte Lösung ist somit $z_3 := 3 - i$. Außerdem haben wir gesehen, daß

$$z^3 - (3-i)z^2 - iz + 1 + 3i = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$$

gilt. Die rechte Seite hat außer z_1, z_2, z_3 offenbar keine weiteren Nullstellen; damit hat aber auch die linke Seite genau die Nullstellen z_1, z_2, z_3.

Fazit:

$$z^3 - (3-i)z^2 - iz + 1 + 3i \quad \Leftrightarrow \quad z \in \{z_1, z_2, z_3\}.$$

Hinweils: Wir werden in Kürze den Fundamentalsatz der Algebra kennenlernen. Damit läßt sich die Überlegung am Ende der Lösung abkürzen.

Aufgabe 9

a) Hier handelt es sich um die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, die vom Punkt $-1-i$ den gleichen Abstand haben wie vom Punkt $3+3i$. Das ist die Mittelsenkrechte der Verbindungsstrecke dieser beiden Punkte, also die Gerade $\operatorname{Im} z = -\operatorname{Re} z + 2$.

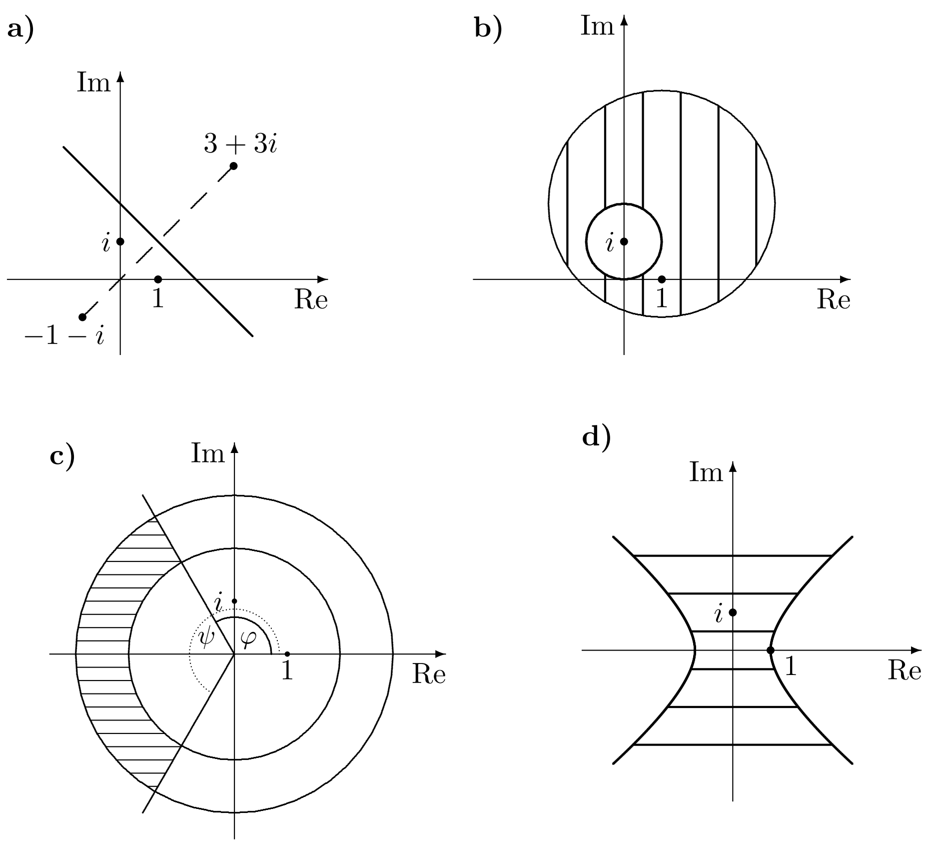
b) Dies ist der Schnitt zwischen dem Äußeren des Kreises um i mit Radius 1 (einschließlich der Kreislinie) und dem Inneren des Kreises um $1+2i$ mit Radius 3 (ohne Rand). Die Menge ist in der Skizze schraffiert.

c) Durch $2 < |z| < 3$ wird ein Kreisring um den Punkt 0 mit innerem Radius 2 und äußerem Radius 3 beschrieben. Durch die Bedingung für $\arg z$ wird daraus ein Sektor ausgeschnitten (siehe Skizze; $\varphi = \frac{2}{3}\pi$, $\psi = \frac{4}{3}\pi$); der Rand gehört diesmal nicht dazu.

d) Die komplexe Zahl $z = x + iy$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$) liegt genau dann in dieser Menge, wenn

$$1 \geqslant \operatorname{Re}(z^2) = \operatorname{Re}\big((x+iy)^2\big) = \operatorname{Re}(x^2 + 2ixy - y^2) = x^2 - y^2$$

gilt, d. h. für $x^2 \leqslant 1 + y^2$, also $|x| \leqslant \sqrt{1+y^2}$ bzw. $-\sqrt{1+y^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{1+y^2}$. Die Menge ist in der Skizze schraffiert; man beachte, dass es sich um eine unbeschränkte Menge handelt.



Aufgabe 10 (P)

a) Sei $x \geqslant 0$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$. Nach dem binomischen Lehrsatz gilt

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \geqslant \binom{n}{2} x^2,$$

weil alle Summanden $\geqslant 0$ sind. Ferner ist

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n}{2}\,(n-1) \overset{n \geqslant 2}{\geqslant} \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} = \frac{n^2}{4}\,.$$

Hiermit folgt

$$(1+x)^n \geqslant \frac{n^2}{4}\,x^2\,.$$

b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Im Fall $n=1$ ist $\sqrt[1]{1} = 1 \leqslant 3 = 1 + \frac{2}{\sqrt{1}}$ erfüllt. Für $n \geqslant 2$ ergibt sich nach a)

$$\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n \geqslant \frac{n^2}{4}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^2 = n \qquad \Leftrightarrow \qquad 1+\frac{2}{\sqrt{n}} \geqslant \sqrt[n]{n}\,.$$

c) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir müssen ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so angeben, dass $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant n_0$ erfüllt ist. Dabei darf n_0 von der (fest vorgegebenen) Zahl ε abhängen.

Zunächst stellen wir fest, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$1 \leqslant \sqrt[n]{n} \overset{\text{b)}}{\leqslant} 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$$

bzw. äquivalent hierzu

$$0 \leqslant \sqrt[n]{n} - 1 \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}}\,.$$

Daher ist die Abschätzung $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$ erfüllt, wenn $\frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon$ ist.

Wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{4}{\varepsilon^2}$ (Da die natürlichen Zahlen nicht nach oben beschränkt sind, existiert ein solches n_0.). Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant n_0$

$$n > \frac{4}{\varepsilon^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sqrt{n} > \frac{2}{\varepsilon} \qquad \Leftrightarrow \qquad \varepsilon > \frac{2}{\sqrt{n}}\,.$$

Wir zuvor bemerkt, gilt für diese n

$$|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon\,.$$

Bemerkung: Wir haben $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ gezeigt.