Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dipl.-Math. Matthias Uhl

WS 2011/12
02.11.2011

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

3. Übungsblatt

Aufgabe 1

Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen Supremum, Infimum, Maximum bzw. Minimum besitzen. Bestimmen Sie gegebenenfalls diese Werte.

a) $A := \left\{x^2 - x + 2 \,:\, x \in \mathbb{R}\right\}$

b) $B := \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$

c) $C := \left\{x + \dfrac{1}{x} \,:\, 0 < x \leqslant 42\right\}$

d) $D := \left\{\dfrac{x^2}{1+x^2} \,:\, x \in \mathbb{R}\right\}$

Hinweis zu b): Sie können die scheinbar offensichtliche Tatsache benutzen, dass zu jeder reellen Zahl α eine natürliche Zahl n existiert mit $\alpha \leqslant n$.

Aufgabe 2

Seien A und B beschränkte, nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$. Begründen Sie, dass dann auch

$$A + B := \left\{a + b \,:\, a \in A \text{ und } b \in B\right\}$$

eine beschränkte Menge ist und dass

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B \qquad \text{sowie} \qquad \inf(A+B) = \inf A + \inf B$$

gelten.

Aufgabe 3

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei das abgeschlossene Intervall $I_k := [-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]$ gegeben. Definiere

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k := \left\{x \,:\, \forall k \in \mathbb{N} :\, x \in I_k\right\}.$$

Zeigen Sie:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k = \{0\}.$$

Hinweis: Zu jeder reellen Zahl α existiert eine natürliche Zahl n mit $\alpha \leqslant n$.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(m,n) \mapsto 2^{m-1}(2n-1)$ bijektiv ist.

Hinweis: Sie können verwenden, dass es zu jeder natürlichen Zahl γ Zahlen $a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $b \in \mathbb{N}$, wobei b ungerade ist, gibt mit $\gamma = 2^a b$.