Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2011/12
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dipl.-Math. Matthias Uhl

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) 1.) Es gilt $\min A = \frac{7}{4}$:
Wir formen zunächst den definierenden Ausdruck mittels quadratischer Ergänzung um: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$x^2 - x + 2 = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\,.$$

Daraus lesen wir einerseits ab, dass $(\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} + 2 = \frac{7}{4}$ gilt; also liegt $\frac{7}{4}$ in A. Andererseits sehen wir $x^2 - x + 2 \geq \frac{7}{4}$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ ein. Also ist $\frac{7}{4}$ das kleinste Element von A.

2.) Aus 1.) folgt direkt $\inf A = \min A = \frac{7}{4}$.

3.) Maximum und Supremum von A exisitieren nicht:
Dazu zeigen wir, dass A nach oben unbeschränkt ist, d.h. zu jedem $\gamma \in \mathbb{R}$ existiert ein $a \in A$ mit $a > \gamma$. Sei $\gamma \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir setzen $x := \max\{\gamma, 2\}$. Dann gilt

$$\underbrace{x^2 - x + 2}_{=:a \in A} = x \underbrace{(x-1)}_{\geq 1,\text{ da } x \geqslant 2} + 2 \geq x + 2 > x \geq \gamma\,.$$

b) 1.) Es gilt $\max B = \frac{3}{2}$:
Offenbar gilt $\frac{3}{2} = (-1)^2 + \frac{1}{2} \in B$. Sei nun $b \in B$. Es bleibt $b \leq \frac{3}{2}$ zu zeigen: Nach Definition gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $b = (-1)^n + \frac{1}{n}$. Wir machen folgende Fallunterscheidung:
Fall n ungerade: Dann gilt $b = (-1)^n + \frac{1}{n} = -1 + \frac{1}{n} \leq -1 + 1 = 0 \leq \frac{3}{2}$.
Fall n gerade: Dann ist insbesondere $n \geq 2$ und es folgt $b = (-1)^n + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.
In jedem Fall folgt $b \leq \frac{3}{2}$, also ist $\frac{3}{2}$ das größte Element von B.

2.) Aus 1.) folgt direkt $\sup B = \max B = \frac{3}{2}$.

3.) Es gilt $\inf B = -1$:
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $(-1)^n + \frac{1}{n} \geqslant (-1)^n \geqslant -1$, also ist -1 eine untere Schranke von B.
Es bleibt zu zeigen, dass -1 die größte untere Schranke ist. Dazu nehmen wir an, dass es eine größere untere Schranke K gibt, etwa $K = -1 + \varepsilon$ mit einem $\varepsilon > 0$, und führen dies zu einem Widerspruch. Es soll also gelten

$$K \leqslant (-1)^n + \frac{1}{n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da dies insbesondere für ungerade n gilt, folgt für alle ungeraden $n \in \mathbb{N}$

$$-1 + \varepsilon \leqslant -1 + \frac{1}{n} \quad \Longleftrightarrow \quad \varepsilon \leqslant \frac{1}{n} \quad \Longleftrightarrow \quad n \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\,.$$

Dies kann jedoch nicht sein, weil die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen nicht nach oben beschränkt ist (vgl. Hinweis). Also ist die Annahme falsch, und es gilt $-1 = \inf B$.

4.) Es gilt $-1 \notin B$:
Angenommen, $-1 \in B$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $(-1)^n + \frac{1}{n} = -1 \Longleftrightarrow (-1)^n + 1 = -\frac{1}{n}$. Da auf der linken Seite eine ganze Zahl steht, muss auf der rechten Seite ebenfalls eine solche stehen, so dass $n = 1$ folgt. Jedoch ist die Gleichung $(-1)^n + \frac{1}{n} = -1$ für $n = 1$ nicht erfüllt. Widerspruch!

5.) Aus 3.) und 4.) folgt direkt: B hat kein Minimum.

c) 1.) Es gilt $\min C = 2$:
Es ist $2 \in C$ (man setze $x = 1$). Ferner erhalten wir für alle $x \in (0, 42]$

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + 1 \geqslant 2x \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x-1)^2 \geqslant 0 \qquad (1)$$

und letzteres ist offensichtlich wahr. Also ist 2 das kleinste Element von C.

2.) Aus 1.) folgt direkt $\inf C = \min C = 2$.

3.) Supremum und Maximum von C existieren nicht:
Um zu begründen, dass C nicht nach oben beschränkt ist, führen wir einen Widerspruchsbeweis und nehmen dazu an, dass Γ eine obere Schranke von C ist. Zuerst stellen wir fest, dass $\Gamma \geqslant 1$ ist, denn nach (1) gilt $x + \frac{1}{x} > 1$ für alle $x \in (0, 42]$. Außerdem gilt für alle $x \in (0, 42]$: $x + \frac{1}{x} \leqslant \Gamma$, also insbesondere $\frac{1}{x} \leqslant \Gamma$ bzw. $\frac{1}{\Gamma} \leqslant x$. Ist jedoch $x := \frac{1}{2\Gamma}$ gesetzt, so ist diese Ungleichung wegen $\frac{1}{\Gamma} \leqslant x \Longleftrightarrow \frac{1}{\Gamma} \leqslant \frac{1}{2\Gamma} \Longleftrightarrow 1 \leqslant \frac{1}{2}$ falsch, obwohl $x \in (0, \frac{1}{2}] \subset (0, 42]$ liegt. Somit ist die getroffene Annahme falsch, woraus die Behauptung folgt.

d) 1.) Es gilt $\min D = 0$:
Es gilt $0 \in D$ (man setze $x = 0$). Außerdem gilt offenbar $x^2(1 + x^2)^{-1} \geqslant 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist 0 das kleinste Element von D.

2.) Aus 1.) folgt direkt $\inf D = \min D = 0$.

3.) Es gilt $\sup D = 1$:
Die Menge D ist nach oben durch 1 beschränkt, denn wegen $1 + x^2 > 0$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{x^2}{1 + x^2} \leqslant 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 \leqslant 1 + x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leqslant 1$$

und letzteres ist wahr. Es bleibt zu zeigen, dass 1 die kleinste obere Schranke von D ist. Sei $\Gamma < 1$ beliebig; wir wollen zeigen, dass Γ keine obere Schranke von D ist. Wir müssen dazu ein Element in D angeben, das größer als Γ ist. Hierzu zeigen wir, dass es ein $x \in \mathbb{R}$ gibt mit $\frac{x^2}{1+x^2} > \Gamma$. Dies ist äquivalent zu

$$x^2 > \Gamma(1 + x^2) \quad \Longleftrightarrow \quad (1 - \Gamma)x^2 > \Gamma \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 > \frac{\Gamma}{1 - \Gamma}$$

und die letzte Ungleichung ist für ein hinreichend großes $x \in \mathbb{R}$ (etwa für $x = \frac{\Gamma}{1-\Gamma} + 1$) erfüllt.

4.) Es gilt $1 \notin D$:
Angenommen, $1 \in D$. Dann gibt es $x \in \mathbb{R}$ mit $1 = \frac{x^2}{1+x^2}$. Daraus folgt $x^2 + 1 = x^2$ und daraus der Widerspruch $1 = 0$.

5.) Aus 3.) und 4.) folgt direkt: D hat kein Maximum.

Aufgabe 2

Da $A \neq \emptyset$ und $B \neq \emptyset$ beschränkt sind, also insbesondere nach oben beschränkt sind, existieren $\alpha := \sup A$ und $\beta := \sup B$. Wir sollen nun zeigen, dass $A + B$ nach oben beschränkt ist und dass $\sup(A + B) = \alpha + \beta$ gilt. Dazu müssen wir zwei Dinge beweisen: Zum einen, dass $\alpha + \beta$ eine obere Schranke von $A + B$ ist, und zum anderen, dass dies auch die kleinste obere Schranke ist.

Sei $x \in A + B$ beliebig. Definitionsgemäß gibt es $a \in A$ und $b \in B$ mit $x = a + b$. Da α bzw. β obere Schranken von A bzw. B sind, gilt $a \leqslant \alpha$ und $b \leqslant \beta$. Addieren dieser beiden Gleichungen liefert

$$x = a + b \leqslant \alpha + \beta\,.$$

Damit wissen wir: $A + B$ ist nach oben beschränkt und $\alpha + \beta$ ist eine obere Schranke von $A + B$.

Aber ist $\alpha + \beta$ auch die kleinste obere Schranke von $A + B$? Dies können wir garantieren, wenn wir zeigen: Keine Zahl kleiner als $\alpha + \beta$ ist eine obere Schranke von $A + B$, d.h. zu jeder Zahl $\Gamma < \alpha + \beta$ existiert ein $x \in A + B$ mit $x > \Gamma$.

Sei dazu $\Gamma < \alpha + \beta$ beliebig. Dann ist $\Gamma - \alpha < \beta$ und, da β die kleinste obere Schranke von B ist, muss ein $b \in B$ existieren mit $b > \Gamma - \alpha$. Es gilt also $\alpha > \Gamma - b$. Daher existiert wiederum ein $a \in A$ mit $a > \Gamma - b$, d.h. es ist $a + b > \Gamma$. Wegen $a + b \in A + B$ kann damit Γ keine obere Schranke von $A + B$ sein.

Nun zum Infimum: Da A und B nach unten beschränkt sind, folgt genau wie oben, dass auch $A+B$ nach unten beschränkt ist. Da $\inf M = -\sup(-M)$ für beschränkte nichtleere Mengen $M \subset \mathbb{R}$ gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned}\inf(A+B) &= -\sup\big(-(A+B)\big) = -\sup\big((-A)+(-B)\big) = -\big(\sup(-A)+\sup(-B)\big)\\ &= -\big(-\inf A + (-\inf B)\big) = \inf A + \inf B\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Wir zeigen die beiden Inklusionen $\{0\} \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$ und $\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \subset \{0\}$.
Zu $\{0\} \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$: Offenbar gilt $0 \in I_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und damit auch $0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$.
Zu $\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \subset \{0\}$: Sei $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$. Daher gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$-\frac{1}{k} \leqslant x \leqslant \frac{1}{k}\,.$$

Angenommen, es wäre $x < 0$. Aus $-1/k \leqslant x$ folgt dann durch Multiplikation mit k/x (dies ist eine negative Zahl): $-1/x \geqslant k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, im Widerspruch dazu, dass $\mathbb{N}$ nach oben unbeschränkt ist (vgl. Hinweis). Wäre $x > 0$, so folgte aus $x \leqslant 1/k$ durch Multiplikation mit k/x, dass $k \leqslant 1/x$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Dies steht erneut im Widerspruch dazu, dass $\mathbb{N}$ nach oben nicht beschränkt ist.
Da $\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$ nichtleer ist, muss also $x = 0$ gelten, so dass wir $\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \subset \{0\}$ gezeigt haben.

Aufgabe 4

Sei $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(m,n) \mapsto 2^{m-1}(2n-1)$. Um die Bijektivität von f zu zeigen, müssen wir begründen, dass f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Beh.: f ist injektiv. Hierzu müssen wir einsehen: Für alle $(m,n), (m',n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gilt

$$f(m,n) = f(m',n') \quad \Rightarrow \quad (m,n) = (m',n')\,.$$

Seien dazu $(m,n), (m',n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $f(m,n) = f(m',n')$, d.h.

$$2^{m-1}(2n-1) = 2^{m'-1}(2n'-1)\,. \tag{2}$$

Nun ist $(m,n) = (m',n')$, also $m = m'$ und $n = n'$, zu zeigen. Es gilt

$$2^{m-m'}(2n-1) = 2^{-m'+1}\,2^{m-1}(2n-1) \overset{(2)}{=} 2^{-m'+1}2^{m'-1}(2n'-1) = 2n'-1\,.$$

Da $2n'-1$ ungerade ist, muss auch $2^{m-m'}(2n-1)$ ungerade sein. Dies ist nur für $2^{m-m'} = 1$ bzw. $m = m'$ möglich. Setzen wir $m = m'$ in (2) ein, so folgt

$$2^{m-1}(2n-1) = 2^{m-1}(2n'-1) \quad \Longleftrightarrow \quad 2n-1 = 2n'-1 \quad \Longleftrightarrow \quad n = n'\,.$$

Insgesamt haben wir $(m,n) = (m',n')$. Hiermit ist die Injektivität von f gezeigt.

Beh.: f ist surjektiv, d.h. $f(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \mathbb{N}$. Wir müssen begründen, dass es zu jedem $x \in \mathbb{N}$ ein $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gibt mit $x = f(m,n)$.
Sei dazu $x \in \mathbb{N}$ beliebig. Nach dem Hinweis existieren $a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und ein ungerades $b \in \mathbb{N}$ mit

$$x = 2^a b = 2^{a+1-1}\Big(2\,\frac{b+1}{2} - 1\Big)\,.$$

Setze $m := a+1$ und $n := \frac{b+1}{2}$. Dann sind $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$, weil b ungerade ist. Außerdem gilt $x = 2^{m-1}(2n-1) = f(m,n)$. Hiermit ist die Surjektivität von f bewiesen.

Beweis des Hinweises (als Bonus): Beh.: Zu jedem $x \in \mathbb{N}$ gibt es ein $a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und ein ungerades $b \in \mathbb{N}$ mit $x = 2^a b$.

Sei $x \in \mathbb{N}$. Betrachte die Menge $M := \{y \in \mathbb{N} \cup \{0\} : 2^y \text{ teilt } x\}$. Wegen $0 \in M$ ist $M \neq \emptyset$. Außerdem gilt $M \subset \{0, 1, \ldots, x\}$, weil $2^y > x$ für alle $y \in \mathbb{N}$ mit $y > x$ ist. Somit ist $M \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$ eine endliche, nichtleere Menge. Daher existiert $\max M =: a$. Insbesondere teilt 2^a die Zahl x, d.h. es gibt ein $b \in \mathbb{N}$ mit $x = 2^a b$. Wäre b gerade, so existiert $c \in \mathbb{N}$ mit $b = 2c$. Dann ist $x = 2^a b = 2^{a+1} c$. Folglich teilt 2^{a+1} die Zahl x, so dass auch $a + 1$ in M liegt, was aber der Maximalität von a widerspricht. Also ist die getroffene Annahme, dass b gerade ist, falsch. Das bedeutet, dass b ungerade ist.

Bemerkung: Eine Menge A wird als *abzählbar unendlich* bezeichnet, wenn sie die gleiche Mächtigkeit hat wie die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Dies bedeutet, dass eine Bijektion zwischen A und $\mathbb{N}$ existiert, die Menge A also „durchnummeriert“ werden kann. Wie oben gesehen, gibt es eine bijektive Abbildung $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, daher ist die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar unendlich.