Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dipl.-Math. Matthias Uhl

WS 2011/12
08.11.2011

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

4. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie:

$$\sum_{j=3}^{5} \frac{j+1}{j-2}\,, \qquad \sum_{k=1}^{111} 5\,, \qquad \sum_{l=-2}^{4} (l+1)^2\,, \qquad \sum_{m=0}^{3} \sum_{n=m}^{3} n(n+m)\,.$$

b) Schreiben Sie mit Hilfe des Summenzeichens:

$$2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3\,, \qquad \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\,, \qquad \frac{2}{1\cdot 3} + \frac{3}{2\cdot 4} + \frac{4}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{100}{99\cdot 101}\,.$$

c) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reelle Zahlen. Welche der folgenden Summen sind gleich?

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\,, \qquad \sum_{l=0}^{n-1} a_{l+1}\,, \qquad \sum_{j=2}^{n+1} a_{j-1}\,, \qquad a_1 + \sum_{k=0}^{n-2} a_{n-k}\,.$$

Aufgabe 2

a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ reelle Zahlen. Berechnen Sie den Wert der sogenannten *Teleskopsumme*:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1})\,.$$

b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Zeigen Sie die sogenannte *geometrische Summenformel*:

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}\,.$$

c) Folgern Sie hieraus, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k.$$

Schreiben Sie diese Formel für $n = 2$ und $n = 3$ explizit aus.

d) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie unter Verwendung von **c)**, dass für alle $x, y \in [0, \infty)$ gilt:

$$x \leqslant y \quad \Longleftrightarrow \quad x^n \leqslant y^n.$$

— bitte wenden —

Aufgabe 3

a) Berechnen Sie mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes:

i) $\sum_{j=0}^{4} \binom{4}{j} (-1)^j 3^{j+1}$;

ii) $\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

b) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$. Berechnen Sie den Wert des Produkts

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2 - 1}{k^2} .$$

Aufgabe 4

a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

i) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$;

ii) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$;

iii) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$;

iv) $6^n - 5n + 4$ ist durch 5 teilbar, d.h. es gibt $m \in \mathbb{Z}$ mit $6^n - 5n + 4 = 5m$.

b) Bestimmen Sie die Menge aller natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$, für die $2^n > n^2$ erfüllt ist.

c) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$:

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{n^n}{n!} .$$

Aufgabe 5

Die Zahlen $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, seien rekursiv definiert durch

$$a_1 := 1 , \qquad a_2 := \frac{1}{4} , \qquad a_n := \frac{(n-1)^2 (n-2)^2}{n^2} \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \quad \text{für } n \geqslant 3.$$

Finden Sie eine nicht-rekursive Formel für a_n und beweisen Sie diese.