Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2011/12
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dipl.-Math. Matthias Uhl

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 1

a)

$$\sum_{j=3}^{5}\frac{j+1}{j-2}=\frac{3+1}{3-2}+\frac{4+1}{4-2}+\frac{5+1}{5-2}=4+\frac{5}{2}+2=\frac{17}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{111}5=\underbrace{5+5+\ldots+5}_{111\text{-mal}}=111\cdot 5=555$$

$$\begin{aligned}\sum_{l=-2}^{4}(l+1)^2&=(-2+1)^2+(-1+1)^2+(0+1)^2+(1+1)^2+(2+1)^2+(3+1)^2+(4+1)^2\\&=1+0+1+4+9+16+25=56\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{3}\sum_{n=m}^{3}n(n+m)&=\sum_{n=0}^{3}n(n+0)+\sum_{n=1}^{3}n(n+1)+\sum_{n=2}^{3}n(n+2)+\sum_{n=3}^{3}n(n+3)\\&=(0+1+4+9)+(2+6+12)+(8+15)+18=75\end{aligned}$$

b)

$$2^3+3^3+4^3+5^3=\sum_{j=2}^{5}j^3$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\sum_{k=3}^{6}\frac{1}{k}$$

$$\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{3}{2\cdot 4}+\frac{4}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{100}{99\cdot 101}=\sum_{n=2}^{100}\frac{n}{(n-1)(n+1)}=\sum_{j=1}^{99}\frac{j+1}{j(j+2)}=\sum_{j=3}^{101}\frac{j-1}{(j-2)j}$$

c) Alle Summen sind gleich, denn jede ergibt $a_1+a_2+\ldots+a_n$. Dies lässt sich mit Hilfe von Indexverschiebungen (das sind bijektive Abbildungen von $\{1,2,\ldots,n\}$ nach $\{1,2,\ldots,n\}$) einsehen:

$$\sum_{k=1}^{n}a_k\overset{l:=k-1}{=}\sum_{l=0}^{n-1}a_{l+1}\overset{j:=l+2}{=}\sum_{j=2}^{n+1}a_{j-1}=a_1+\sum_{j=3}^{n+1}a_{j-1}\overset{k:=n+1-j}{=}a_1+\sum_{k=0}^{n-2}a_{n-k}\,.$$

Aufgabe 2

a) Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}(a_k-a_{k+1})&=\sum_{k=0}^{n-1}a_k-\sum_{k=0}^{n-1}a_{k+1}=\left(a_0+\sum_{k=1}^{n-1}a_k\right)-\left(\sum_{k=0}^{n-2}a_{k+1}+a_n\right)\\&\overset{j:=k-1}{=}a_0+\left(\sum_{j=0}^{n-2}a_{j+1}-\sum_{k=0}^{n-2}a_{k+1}\right)-a_n=a_0+0-a_n=a_0-a_n\,.\end{aligned}$$

Bemerkung: Obige Rechnung kann man auch etwas informeller durchführen:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}(a_k - a_{k+1}) &= (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_{n-2} - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_n)\\ &= a_0 - a_1 + a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + - \ldots + a_{n-2} - a_{n-1} + a_{n-1} - a_n\\ &= a_0 + (-a_1 + a_1) + (-a_2 + a_2) + \ldots + (-a_{n-1} + a_{n-1}) - a_n\\ &= a_0 + 0 + 0 + \ldots + 0 - a_n = a_0 - a_n\,.\end{aligned}$$

b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Dann gilt

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \sum_{k=0}^{n-1}(q^k - q^{k+1}) \overset{\text{a)}}{=} q^0 - q^n = 1 - q^n\,.$$

Division mit $1 - q \neq 0$ liefert

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}\,.$$

Bemerkung: Diese Identität kann man auch mit vollständiger Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ einsehen.

IA: Für $n = 1$ gilt $\sum_{k=0}^{1-1} q^k = q^0 = 1 = \frac{1-q^1}{1-q}$ für alle $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte $\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$ für alle $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ (IV).

Für jedes $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ergibt sich damit

$$\sum_{k=0}^{(n+1)-1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n-1} q^k + q^n \overset{\text{IV}}{=} \frac{1-q^n}{1-q} + q^n \cdot \frac{1-q}{1-q} = \frac{1 - q^n + q^n - q^n \cdot q}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}\,.$$

c) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Im Fall $a = b$ lautet die behauptete Gleichung $0 = 0$, diese ist offensichtlich wahr. Seien nun $a \neq b$. Im Unterfall $a \neq 0$ setzen wir $q := \frac{b}{a}$. Dann ist $q \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ und laut b) gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^k = \frac{1-(\frac{b}{a})^n}{1-\frac{b}{a}} \quad &\iff \quad \left(1-\frac{b}{a}\right)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^k = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n\\ &\overset{|\cdot a^n (\neq 0)}{\iff} \quad a\left(1-\frac{b}{a}\right)a^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} a^{-k}b^k = a^n - b^n\\ &\iff \quad (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k = a^n - b^n.\end{aligned}$$

Sei nun $a = 0$. Wegen

$$\sum_{k=0}^{n-1} 0^{n-1-k}b^k = \sum_{k=0}^{n-2} \underbrace{0^{n-1-k}}_{=0,\text{ da } n-1-k\geqslant 1} b^k + 0^{n-1-(n-1)}b^{n-1} = 0^0 b^{n-1} = 1 \cdot b^{n-1} = b^{n-1}$$

ergibt sich

$$(0-b)\sum_{k=0}^{n-1} 0^{n-1-k}b^k = -b \cdot b^{n-1} = -b^n = 0 - b^n\,.$$

Also gilt die behauptete Gleichung auch in diesem Unterfall. Damit ist der Beweis beendet.

Insbesondere haben wir nachgerechnet, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \qquad \text{und} \qquad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)\,.$$

d) Im Fall $n = 1$ ist die behauptete Aussage trivial. Seien also $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ sowie $x, y \in [0, \infty)$. Für $x = 0$ ist die Aussage klar. Für $x > 0$ ergibt sich

$$x \leqslant y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \leqslant 0 \quad \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \quad (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k \leqslant 0 \quad \overset{c)}{\Leftrightarrow} \quad x^n - y^n \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^n \leqslant y^n.$$

Zu $(*)$: Wegen $x > 0$ und $y \geqslant 0$ ist $\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k = x^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{x^{n-1-k}y^k}_{\geqslant 0} \geqslant x^{n-1} > 0$.

Aufgabe 3

a) **i)** Es ist

$$\sum_{j=0}^{4} \binom{4}{j}(-1)^j 3^{j+1} = 3\sum_{j=0}^{4}\binom{4}{j}(-3)^j 1^{4-j} = 3(-3+1)^4 = 3 \cdot 16 = 48\,.$$

ii) Sei $n \in \mathbb{N}$. Nach Definition der Binomialkoeffizienten gilt für jedes $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$k\binom{n}{k} = k\cdot\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} = n\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,((n-1)-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}\,.$$

Daher liefert der binomische Lehrsatz

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} \overset{j:=k-1}{=} n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\cdot 1^j \cdot 1^{(n-1)-j} = n\cdot(1+1)^{n-1} = n\cdot 2^{n-1}\,.$$

b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$ gilt

$$\begin{aligned}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{k^2} &= \prod_{k=2}^{n}\frac{(k+1)(k-1)}{k^2} = \frac{\prod_{k=2}^{n}(k+1)\cdot\prod_{k=2}^{n}(k-1)}{\prod_{k=2}^{n}k^2}\\ &= \frac{\prod_{j=3}^{n+1} j\cdot\prod_{m=1}^{n-1} m}{(\prod_{k=2}^{n} k)^2} = \frac{\frac{1}{2}(n+1)!\cdot(n-1)!}{(n!)^2} = \frac{\frac{1}{2}(n+1)\cdot 1}{n} = \frac{n+1}{2n}\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) **i)** Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang (IA): Für $n = 1$ stimmt die behauptete Aussage, denn beide Seiten der Gleichung ergeben dann 1: $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

Induktionsschluss (IS): Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ (Induktionsvoraussetzung, kurz: IV). Dann folgt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \overset{\text{IV}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)(\tfrac{n}{2}+1)\\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\,.\end{aligned}$$

ii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 \overset{\text{a)i)}}{=} 2\cdot\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2 + n - n = n^2.$$

iii) IA: Wegen $\sum_{k=1}^{1} k\cdot k! = 1\cdot 1! = 1 = (1+1)! - 1$ ist die Gleichung für $n=1$ wahr.
IS: Sei $n\in\mathbb{N}$. Für dieses n gelte $\sum_{k=1}^{n} k\cdot k! = (n+1)!-1$ (IV). Dann folgt

$$\sum_{k=1}^{n+1} k\cdot k! = \sum_{k=1}^{n} k\cdot k! + (n+1)(n+1)! \overset{\text{IV}}{=} (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)!$$
$$= (n+1)!\,(1+(n+1)) - 1 = (n+2)! - 1.$$

Bemerkung: Alternativ kann man die Behauptung auch durch Überführung in eine Teleskopsumme direkt nachrechnen: Für ein beliebiges $n\in\mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k\cdot k! = \sum_{k=1}^{n}(k+1-1)\cdot k! = \sum_{k=1}^{n}\big((k+1)! - k!\big) = \sum_{k=1}^{n}(k+1)! - \sum_{k=1}^{n} k!$$
$$= (n+1)! + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)! - \left(1 + \sum_{k=2}^{n} k!\right) = (n+1)! - 1.$$

iv) IA: Für $n=1$ stimmt die behauptete Aussage, denn $6^1 - 5\cdot 1 + 4 = 5$ ist durch 5 teilbar.
IS: Sei $n\in\mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n sei $6^n - 5n + 4$ durch 5 teilbar, etwa $6^n - 5n + 4 = 5m$ für ein $m\in\mathbb{Z}$. (IV)
Zu zeigen ist, dass dann auch $6^{n+1} - 5(n+1) + 4$ durch 5 teilbar ist. Es gilt:

$$6^{n+1} - 5(n+1) + 4 = 6\cdot 6^n - 5n - 5 + 4 = 6\big(6^n - 5n + 4\big) + 25n - 25$$
$$\overset{\text{IV}}{=} 6\cdot 5m + 25n - 25 = (\underbrace{6m + 5n - 5}_{\in\mathbb{Z}})\cdot 5.$$

b) Es gilt $2^1 = 2 > 1 = 1^2$, $2^2 = 4 \not> 4 = 2^2$, $2^3 = 8 \not> 9 = 3^2$, $2^4 = 16 \not> 16 = 4^2$, $2^5 = 32 > 25 = 5^2$, $2^6 = 64 > 36 = 6^2$. Wir vermuten: $2^n > n^2$ für alle $n\in\mathbb{N}$ mit $n\geqslant 5$.

Beweis durch vollständige Induktion:

IA: Für $n=5$ gilt $2^n = 2^5 = 32$ und $n^2 = 5^2 = 25$. Also ist $2^n > n^2$ für $n=5$ wahr.

IS: Sei $n\in\mathbb{N}$ mit $n\geqslant 5$ beliebig. Für dieses n gelte $2^n > n^2$ (IV). Dann folgt

$$2^{n+1} = 2\cdot 2^n \overset{\text{IV}}{>} 2\cdot n^2.$$

Zu zeigen verbleibt: $2n^2 \geqslant (n+1)^2 \iff 2n^2 \geqslant n^2 + 2n + 1 \iff n^2 \geqslant 2n+1$. Die Gültigkeit der letzten Ungleichung sehen wir folgendermaßen

$$n\geqslant 5 \implies n\geqslant 3 \implies n^2 \geqslant 3n \implies n^2 \geqslant 2n + n \implies n^2 \geqslant 2n+1\,. \qquad (*)$$

Fazit: Es gilt $\{n\in\mathbb{N} : 2^n > n^2\} = \{1\}\cup\{n\in\mathbb{N} : n\geqslant 5\}$.

Bemerkung: Wegen $(*)$ funktioniert die Argumentation im Induktionsschluss auch für $n=3$. Trotzdem ist die behauptete Ungleichung $2^n > n^2$ für $n = 3+1 = 4$ falsch. Der Grund liegt in der Ungültigkeit des Induktionsanfangs für $n=3$.
Andererseits würde der Induktionsanfang für $n=1$ gelingen, jedoch glückt dann der Induktionsschluss nicht, weil die Ungleichung $n^2 \geqslant 2n+1$ für $n=1$ falsch ist.

c) IA: Für $n=2$ ist $\prod_{k=1}^{2-1}(1+\frac{1}{k})^k = (1+\frac{1}{1})^1 = 2 = \frac{2^2}{2!}$.
IS: Sei $n\in\mathbb{N}$ mit $n\geqslant 2$ beliebig. Für dieses n gelte $\prod_{k=1}^{n-1}(1+\frac{1}{k})^k = \frac{n^n}{n!}$ (IV). Dann gilt:

$$\prod_{k=1}^{(n+1)-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \left(\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \overset{\text{IV}}{=} \frac{n^n}{n!}\cdot\left(\frac{n}{n}+\frac{1}{n}\right)^n$$
$$= \frac{n^n}{n!}\cdot\frac{(n+1)^n}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n!}\cdot\frac{n+1}{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\,.$$

Aufgabe 5

Wir beginnen damit, einige a_n zu berechnen:

$$a_3 = \frac{(3-1)^2(3-2)^2}{3^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{9}\,, \qquad a_4 = \frac{3^2 2^2}{4^2} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}\,.$$

Es scheint $a_n = 1/n^2$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ zu gelten. Wir bestätigen dies mit vollständiger Induktion:
Induktionsanfang: Für $n = 1$ und $n = 2$ stimmt dies offenbar.
Induktionsschluss: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$. Für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ gelte $a_k = 1/k^2$ (IV).
(Man beachte: Als Induktionsvoraussetzung reicht hier nicht, dass die Formel nur für n gilt, sondern auch für $n-1$, weil man im Induktionsschluss auf Informationen über a_n und a_{n-1} zurückgreift.)
Dann folgt:

$$a_{n+1} = \frac{n^2(n-1)^2}{(n+1)^2} \cdot a_n \cdot a_{n-1} = \frac{n^2(n-1)^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{(n-1)^2} = \frac{1}{(n+1)^2}\,.$$