Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2011/12
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dipl.-Math. Matthias Uhl

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 5. Übungsblatt

Aufgabe 1

Wir bemerken zunächst, dass die Ungleichung $x \leqslant 4 + \sqrt{x-2}$ nur für $x \geqslant 2$ sinnvoll ist. Es gilt

$$x \leqslant 4 + \sqrt{x-2} \quad \Longleftrightarrow \quad x - 4 \leqslant \sqrt{x-2}.$$

Im Fall $x \geqslant 4$ ist dies nach Aufgabe 2 d) vom 4. Übungsblatt äquivalent zu (man beachte $x-4 \geqslant 0$)

$$\begin{aligned}
(x-4)^2 \leqslant x-2 \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2 - 8x + 16 \leqslant x - 2 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 9x + 18 \leqslant 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (x-3)(x-6) \leqslant 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \big(x-3 \leqslant 0 \text{ und } x-6 \geqslant 0\big) \text{ oder } \big(x-3 \geqslant 0 \text{ und } x-6 \leqslant 0\big) \\
&\Longleftrightarrow \quad \big(x-3 \geqslant 0 \text{ und } x-6 \leqslant 0\big) \quad \Longleftrightarrow \quad x \in [3,6].
\end{aligned}$$

Da wir nur $x \geqslant 4$ betrachtet haben, gilt $x \leqslant 4 + \sqrt{x-2}$ in diesem Fall genau für $x \in [4,6]$.
Für jedes $x \in [2,4)$ gilt $x - 4 < 0$ und, da die Wurzel nach Definition nichtnegativ ist, genügt jedes $x \in [2,4)$ der Ungleichung $x - 4 < 0 \leqslant \sqrt{x-2}$ und somit auch $x \leqslant 4 + \sqrt{x-2}$.
Insgesamt haben wir

$$x \leqslant 4 + \sqrt{x-2} \quad \Longleftrightarrow \quad x \in [4,6] \cup [2,4) \quad \Longleftrightarrow \quad x \in [2,6].$$

Aufgabe 2

a) Seien $x, y \in (0,\infty)$. Dann gilt:

$$\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad \overset{\text{A. 2 d), 4. Üb.}}{\Longleftrightarrow} \quad x + y \leqslant x + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leqslant 2\sqrt{x}\sqrt{y}.$$

Die letzte Ungleichung ist offenkundig wahr.

Bemerkung: Die behauptete Ungleichung $\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y}$ ist ein Spezialfall der Abschätzung $(x+y)^s \leqslant x^s + y^s$ für jedes $s \in \mathbb{Q}$ mit $0 < s < 1$. Diese kann man wie folgt nachrechnen:

$$(x+y)^s = \frac{x+y}{(x+y)^{1-s}} = \frac{x}{(x+y)^{1-s}} + \frac{y}{(x+y)^{1-s}} \leqslant \frac{x}{x^{1-s}} + \frac{y}{y^{1-s}} = x^s + y^s.$$

Nun zur zweiten Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x} + \sqrt{y} \leqslant \frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} \quad &\overset{|\cdot\sqrt{x}\sqrt{y}>0}{\Longleftrightarrow} \quad x\sqrt{y} + \sqrt{x}\,y \leqslant x\sqrt{x} + y\sqrt{y} \\
&\Longleftrightarrow \quad 0 \leqslant x\sqrt{x} - x\sqrt{y} + y\sqrt{y} - y\sqrt{x} \\
&\Longleftrightarrow \quad 0 \leqslant (x-y)\big(\sqrt{x} - \sqrt{y}\big)
\end{aligned}$$

Die letzte Aussage ist wahr, denn:

1. Fall: $x \leqslant y$. Dann gilt $\sqrt{x} \leqslant \sqrt{y}$ und daher auch $0 \leqslant (x-y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})$.

2. Fall: $x > y$. Dann gilt $\sqrt{x} > \sqrt{y}$ und daher auch $0 < (x-y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})$, also erst recht $0 \leqslant (x-y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})$.

Hier verwendeten wir die Tatsache, dass für alle $a, b \geqslant 0$ gilt:

$$a \leqslant b \iff \sqrt{a} \leqslant \sqrt{b} \qquad \text{sowie} \qquad a < b \iff \sqrt{a} < \sqrt{b}\,.$$

b) Seien $x, y \in (0, \infty)$. Es gilt

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| \leqslant \sqrt{|x-y|} \overset{\text{A. 2 d), 4. Üb.}}{\iff} \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \leqslant \left(\sqrt{|x-y|}\right)^2 \iff x-2\sqrt{x}\sqrt{y}+y \leqslant |x-y|.$$

Im Fall $x \leqslant y$ ist dies äquivalent zu

$$x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \leqslant y - x \iff 2x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} \leqslant 0 \iff \sqrt{x}\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right) \leqslant 0.$$

Letzteres ist wahr wegen $x \leqslant y \Rightarrow \sqrt{x} \leqslant \sqrt{y}$.

Für $x \geqslant y$ (dies könnte man auch direkt aus obigem Fall folgern, weil $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x-y|}$ symmetrisch bzgl. Tausch $x \leftrightsquigarrow y$ ist) ergibt sich

$$x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \leqslant x - y \iff 2y - 2\sqrt{x}\sqrt{y} \leqslant 0 \iff \sqrt{y}\left(\sqrt{y} - \sqrt{x}\right) \leqslant 0.$$

Letzteres ist wahr wegen $x \geqslant y \Rightarrow \sqrt{x} \geqslant \sqrt{y}$.

Aufgabe 3

a) Es gilt: $z^3 = (3-i)^3 = (3-i)(9-6i+i^2) = (3-i)(8-6i) = 24 - 18i - 8i + 6i^2 = 18 - 26i$. Folglich hat z^3 den Realteil 18 und den Imaginärteil -26. Ferner ist $|z^3| = \sqrt{18^2 + (-26)^2} = \sqrt{1000} = 10\sqrt{10}$. Alternativ kann man $|z^3|$ auch berechnen, ohne z^3 bestimmt zu haben: $|z^3| = |z|^3 = \sqrt{3^2 + (-1)^2}^3 = \sqrt{10}^3 = 10\sqrt{10}$.

b) Wir erweitern den Bruch geeignet (Standardtrick: $z\bar{z}$ ist reell, daher ergibt $\frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$ einen reellen Nenner):

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{3-i} = \frac{1}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i} = \frac{3+i}{3^2-i^2} = \frac{3+i}{10} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}i.$$

Also hat $1/z$ den Realteil $\frac{3}{10}$ und den Imaginärteil $\frac{1}{10}$. Der Betrag von $1/z$ ist $|1/z| = \sqrt{\frac{9}{100} + \frac{1}{100}} = \sqrt{1/10} = \sqrt{10}/10$, alternativ: $|1/z| = 1/|z| = 1/\sqrt{10} = \sqrt{10}/10$.

c) Es ergibt sich $z \cdot w = (3-i)(-1+2i) = -3 + 6i + i - 2i^2 = -1 + 7i$. Also hat $z \cdot w$ Realteil -1 und Imaginärteil 7. Außerdem gilt $|z \cdot w| = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} = |z| \cdot |w|$.

d) Es ist $\overline{z}^2 = \left(\overline{3-i}\right)^2 = (3+i)^2 = 9+6i+i^2 = 8+6i$ und wegen $w^2 = (-1+2i)^2 = 1-4i+4i^2 = -3-4i$ ergibt sich

$$\frac{1}{w^2} = \frac{1}{-3-4i} \cdot \frac{-3+4i}{-3+4i} = \frac{-3+4i}{9-16i^2} = \frac{-3+4i}{25} = -\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i.$$

$\overline{z}^2 + 1/w^2 = (8+6i) + (-\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i)$ hat somit Realteil $8 - \frac{3}{25} = \frac{197}{25}$ und Imaginärteil $6 + \frac{4}{25} = \frac{154}{25}$. Der Betrag von $\overline{z}^2 + 1/w^2$ lautet $|\overline{z}^2 + 1/w^2| = \sqrt{197^2 + 154^2}/25 = \sqrt{2501}/5$.

Aufgabe 4

a) Hier handelt es sich um die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, die vom Punkt $-1-i$ den gleichen Abstand haben wie vom Punkt $3+3i$. Das ist die Mittelsenkrechte der Verbindungsstrecke dieser beiden Punkte, also die Gerade $\operatorname{Im} z = -\operatorname{Re} z + 2$.

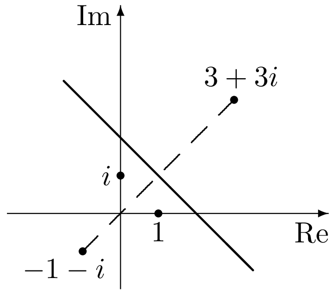
b) Dies ist der Schnitt zwischen dem Äußeren des Kreises um i mit Radius 1 (einschließlich der Kreislinie) und dem Inneren des Kreises um $1+2i$ mit Radius 3 (ohne Rand). Die Menge ist in der Skizze schraffiert.

c) Die komplexe Zahl $z = x + iy$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$) liegt genau dann in dieser Menge, wenn

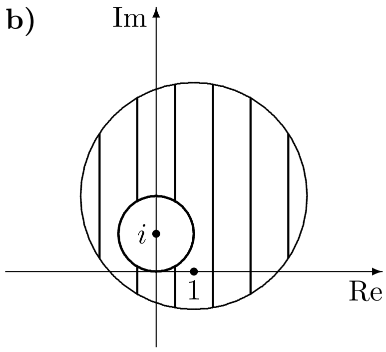
$$1 \geqslant \operatorname{Re}(z^2) = \operatorname{Re}\left((x+iy)^2\right) = \operatorname{Re}(x^2 + 2ixy - y^2) = x^2 - y^2$$

gilt, d.h. für $x^2 \leqslant 1 + y^2$, also $|x| \leqslant \sqrt{1+y^2}$ bzw. $-\sqrt{1+y^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{1+y^2}$. Die Menge ist in der Skizze schraffiert; man beachte, dass es sich um eine unbeschränkte Menge handelt.

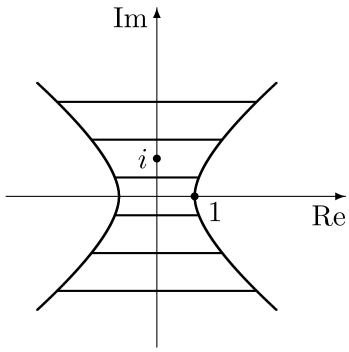
a)



b)



c)



Aufgabe 5

a) Wir verwenden die geometrische Summenformel

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}.$$

In Aufgabe 2 b) des 4. Übungsblatts wurde diese für reelle $q \neq 1$ gezeigt. Diesen Beweis kann man wortwörtlich auch für $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ führen. Danach gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{22} (1-i)^k &= -1 + \sum_{k=0}^{22} (1-i)^k = -1 + \frac{1-(1-i)^{23}}{1-(1-i)} = -1 + \frac{1-(1-i)^{23}}{i} \cdot \frac{-i}{-i} \\ &= -1 - i\big(1-(1-i)^{23}\big). \end{aligned}$$

Wegen

$$(1-i)^{22} = \big((1-i)^2\big)^{11} = (1-2i+i^2)^{11} = (-2i)^{11} = (-1)^{11} 2^{11} i^{11} = -2^{11} i^3 i^8 = 2^{11} i$$

ist

$$(1-i)^{23} = 2^{11} i (1-i) = 2^{11}(i+1).$$

Damit erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{22} (1-i)^k = -1 - i\big(1 - 2^{11}(1+i)\big) = -1 - 2^{11} + i(2^{11}-1) = -2049 + 2047\, i.$$

b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ folgt mit der geometrischen Summenformel

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{i}{2}\Big)^k &\overset{l:=k-1}{=} \sum_{l=0}^{n-1}\Big(\frac{i}{2}\Big)^{l+1} = \frac{i}{2}\sum_{l=0}^{n-1}\Big(\frac{i}{2}\Big)^{l} = \frac{i}{2}\cdot\frac{1-(i/2)^n}{1-i/2}\cdot\frac{1+i/2}{1+i/2} \\
&= \frac{i}{2}\cdot\frac{1-(i/2)^n+i/2-(i/2)^{n+1}}{1-i^2/4} = \frac{i}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\Big(1-(i/2)^n+i/2-(i/2)^{n+1}\Big) \\
&= \frac{2}{5}\,i\,\Big(1+i/2\Big)+\frac{2}{5}\,i\,\Big(-(i/2)^n-(i/2)^{n+1}\Big) = \frac{2}{5}\,i-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\,i\,\Big(-1-i/2\Big)(i/2)^n \\
&= \frac{2}{5}\,i-\frac{1}{5}+\Big(-\frac{2}{5}\,i+\frac{1}{5}\Big)\frac{i^n}{2^n}.
\end{aligned}$$

Nun seien $m \in \mathbb{N}_0$ und $r \in \{0,1,2,3\}$ mit $n = 4m + r$. Dann gilt

$$i^n = i^{4m+r} = i^{4m}\cdot i^r = (i^4)^m\cdot i^r = 1^m\cdot i^r = i^r$$

und damit

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{i}{2}\Big)^k = \frac{2}{5}\,i-\frac{1}{5}+\Big(-\frac{2}{5}\,i+\frac{1}{5}\Big)\frac{i^r}{2^n}.$$

Für $r = 0$ (also, falls n durch 4 teilbar ist) gilt

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{i}{2}\Big)^k = \frac{2}{5}\,i-\frac{1}{5}+\Big(-\frac{2}{5}\,i+\frac{1}{5}\Big)\frac{1}{2^n} = -\frac{1}{5}+\frac{1}{5\cdot 2^n}+i\,\Big(\frac{2}{5}-\frac{1}{5\cdot 2^{n-1}}\Big).$$

Für $r = 1$ (also, falls n durch 4 mit Rest 1 teilbar ist) gilt

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{i}{2}\Big)^k = \frac{2}{5}\,i-\frac{1}{5}+\Big(-\frac{2}{5}\,i+\frac{1}{5}\Big)\frac{i}{2^n} = -\frac{1}{5}+\frac{1}{5\cdot 2^{n-1}}+i\,\Big(\frac{2}{5}+\frac{1}{5\cdot 2^{n}}\Big).$$

Für $r = 2$ (also, falls n durch 4 mit Rest 2 teilbar ist) gilt

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{i}{2}\Big)^k = \frac{2}{5}\,i-\frac{1}{5}+\Big(-\frac{2}{5}\,i+\frac{1}{5}\Big)\frac{-1}{2^n} = -\frac{1}{5}-\frac{1}{5\cdot 2^n}+i\,\Big(\frac{2}{5}+\frac{1}{5\cdot 2^{n-1}}\Big).$$

Für $r = 3$ (also, falls n durch 4 mit Rest 3 teilbar ist) gilt

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{i}{2}\Big)^k = \frac{2}{5}\,i-\frac{1}{5}+\Big(-\frac{2}{5}\,i+\frac{1}{5}\Big)\frac{-i}{2^n} = -\frac{1}{5}-\frac{1}{5\cdot 2^{n-1}}+i\,\Big(\frac{2}{5}-\frac{1}{5\cdot 2^{n}}\Big).$$

Wir lesen ab:

$$\mathrm{Re}\Big(\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{i}{2}\Big)^k\Big) = \begin{cases} -\frac{1}{5}+\frac{1}{5\cdot 2^n}\ , & \text{falls } n \text{ durch 4 teilbar ist} \\ -\frac{1}{5}+\frac{1}{5\cdot 2^{n-1}}, & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 1 teilbar ist} \\ -\frac{1}{5}-\frac{1}{5\cdot 2^n}\ , & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 2 teilbar ist} \\ -\frac{1}{5}-\frac{1}{5\cdot 2^{n-1}}, & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 3 teilbar ist} \end{cases}$$

$$\mathrm{Im}\Big(\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{i}{2}\Big)^k\Big) = \begin{cases} \frac{2}{5}-\frac{1}{5\cdot 2^{n-1}}, & \text{falls } n \text{ durch 4 teilbar ist} \\ \frac{2}{5}+\frac{1}{5\cdot 2^n}\ , & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 1 teilbar ist} \\ \frac{2}{5}+\frac{1}{5\cdot 2^{n-1}}, & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 2 teilbar ist} \\ \frac{2}{5}-\frac{1}{5\cdot 2^n}\ , & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 3 teilbar ist} \end{cases}$$

Aufgabe 6

Seien $w, z \in \mathbb{C}$. Mit Hilfe von $|\lambda|^2 = \lambda\overline{\lambda}$, $\overline{\overline{\lambda}} = \lambda$ und $\mathrm{Re}(\lambda) = \frac{1}{2}(\lambda + \overline{\lambda})$ (für alle $\lambda \in \mathbb{C}$) erhalten wir

$$|z+w|^2 = (z+w)\overline{(z+w)} = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) = z\overline{z} + z\overline{w} + \underbrace{w\overline{z}}_{=\overline{\overline{w}z}=\overline{z\overline{w}}} + w\overline{w} = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2.$$

Daraus ergibt sich sofort

$$|z-w|^2 = |z+(-w)|^2 = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}\big(z(\overline{-w})\big) + |-w|^2 = |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2.$$

Addiert man diese Gleichungen, so folgt

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2.$$

Geometrische Bedeutung: In einem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate der Diagonalenlängen gleich der Summe der Quadrate der Seitenlängen.