Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dipl.-Math. Matthias Uhl

WS 2011/12
22.11.2011

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

6. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Bestimmen Sie jeweils alle $z \in \mathbb{C}$, die Lösungen der Gleichung sind:

i) $z^3 + 8 = 0$; **ii)** $z^2 = |z|^2$.

b) Zerlegen Sie die folgenden Polynome in Linearfaktoren:

i) $p(z) := z^2 - 2z + 3$; **ii)** $q(z) := z^4 + (1+i)z^3 + (6+i)z^2 + 6z$.

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie anhand der Definition, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\frac{2n}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Zahl a konvergiert, und geben Sie zu $\varepsilon := 10^{-10}$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so an, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant n_0$ stets $|a_n - a| < \varepsilon$ gilt.

b) Entscheiden Sie jeweils, ob die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so gibt, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant n_0$ gilt:

i) $|a_n - a_{n+1}| < \varepsilon$; **ii)** $|a_n| < 2\varepsilon^2$; **iii)** $|a_n + a_{n+1}| < \varepsilon$.

Aufgabe 3

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $a_n = \dfrac{n^2 + 3n - 4}{1 + n^2 + 4n^3}$

b) $a_n = (-1)^n + 1/n$

c) $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} \frac{k}{n^4}$

d) $a_n = \dfrac{(2\sqrt{n} + 3)^2}{(3\sqrt[3]{n} + 2)^3}$

e) $a_n = \sqrt{9n^2 + 2n + 1} - 3n$

f) $a_n = n^4 \left(\sqrt[10]{1 + 3n^{-4} + n^{-9}} - 1 \right)$

g) $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$

h) $a_n = \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{3+4i}{15} \right)^n$

Aufgabe 4

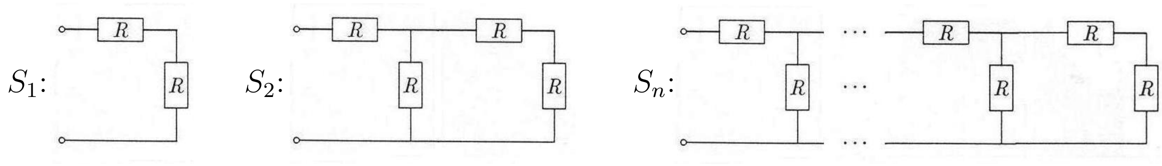
a) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Konvergiert die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n \cdot b_n$? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Nun seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Konvergiert die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n \cdot b_n$? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

— bitte wenden —

Aufgabe 5

R sei ein fester Ohmscher Widerstand. Durch Aneinanderhängen von $n \in \mathbb{N}$ Bauelementen entsteht die folgende Schaltung S_n:



a) Leiten Sie die folgende Rekursionsvorschrift für den Gesamtwiderstand W_n von S_n her:

$$W_1 = 2R, \qquad W_n = R + \frac{RW_{n-1}}{R + W_{n-1}} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setze $a_n := W_n/R$. Zeigen Sie, dass $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \leqslant a_n \leqslant 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton ist.

c) Begründen Sie, dass der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert, und berechnen Sie diesen.