Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dipl.-Math. Matthias Uhl

WS 2011/12

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 6. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) i) Offenbar ist die Gleichung $z^3+8=0$ für $z=-2$ erfüllt. Mit Hilfe der Polynomdivision

$$
\begin{array}{l}
z^3+8:(z-(-2)) = \big(\;\; z^3 \qquad\qquad +8\big):\big(z+2\big) = z^2-2z+4 \\
\qquad -z^3-2z^2 \\
\qquad\qquad -2z^2 \\
\qquad\qquad\quad 2z^2+4z \\
\qquad\qquad\qquad\quad 4z+8 \\
\qquad\qquad\qquad\; -4z-8 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

erhalten wir

$$
\begin{aligned}
z^3+8=0 \quad &\iff \quad (z+2)(z^2-2z+4)=0 \quad \iff \quad (z+2)\big((z-1)^2+3\big)=0 \\
&\iff \quad z=-2 \quad \text{oder} \quad (z-1)^2=-3 \\
&\iff \quad z=-2 \quad \text{oder} \quad z-1=\sqrt{3}\,i \quad \text{oder} \quad z-1=-\sqrt{3}\,i \\
&\iff \quad z=-2 \quad \text{oder} \quad z=1+\sqrt{3}\,i \quad \text{oder} \quad z=1-\sqrt{3}\,i.
\end{aligned}
$$

ii) Mit dem Ansatz $z=a+ib$ $(a,b\in\mathbb{R})$ erhalten wir

$$
\begin{aligned}
z^2=|z|^2 \quad &\iff \quad a^2+2aib+(ib)^2=a^2+b^2 \quad \iff \quad a^2+2aib-b^2=a^2+b^2 \\
&\overset{(*)}{\iff} \quad a^2-b^2=a^2+b^2 \;\; \text{und} \;\; 2ab=0 \\
&\iff \quad -2b^2=0 \;\; \text{und} \;\; \big(a=0 \;\; \text{oder} \;\; b=0\big) \\
&\iff \quad b=0 \;\; \text{und} \;\; \big(a=0 \;\; \text{oder} \;\; b=0\big) \\
&\iff \quad b=0.
\end{aligned}
$$

[In $(*)$ verwenden wir, dass zwei komplexe Zahlen genau dann gleich sind, wenn sie den selben Real- und Imaginärteil besitzen.]
Also ist $z^2=|z|^2$ genau dann erfüllt, wenn $\operatorname{Im}(z)=0$ bzw. $z\in\mathbb{R}$ ist.

b) i) Es gilt $p(z)=(z-1)^2+2$. Daher ist die Gleichung $p(z)=0$ genau dann erfüllt, wenn $(z-1)^2=-2$ gilt, d.h. $z-1=i\sqrt{2}$ oder $z-1=-i\sqrt{2}$. Also hat das Polynom p die zwei Nullstellen $z_1=1+i\sqrt{2}$ und $z_2=1-i\sqrt{2}$. Hieraus folgt die Linearfaktorzerlegung

$$p(z)=(z-z_1)(z-z_2)=(z-1-i\sqrt{2})(z-1+i\sqrt{2}).$$

ii) Wir stellen zunächst fest, dass $z_0=0$ eine Nullstelle des Polynoms q ist. Also ist

$$q(z)=z\underbrace{\big(z^3+(1+i)z^2+(6+i)z+6\big)}_{=:r(z)}.$$

Außerdem ist $z_1 = -1$ eine Nullstelle von q und somit auch von r. Um die noch fehlenden zwei Nullstellen von q zu bestimmen, führen wir eine Polynomdivision durch:

$$
\begin{array}{l}
r(z) : (z - z_1) = \big(\quad z^3 + (1 + 1i)\, z^2 + (6 + 1i)\, z + 6 \big) : \big(z + 1\big) = z^2 + iz + 6. \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-\, z^3 \qquad\quad -\, z^2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad iz^2 + (6 + 1i)\, z \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\ \underline{-\, iz^2 \qquad\quad -\, iz} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 6z + 6 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\ \underline{-\, 6z - 6} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Durch quadratische Ergänzung erhalten wir nun

$$
\begin{aligned}
z^2 + iz + 6 = 0 \quad &\iff \quad (z + \frac{1}{2}i)^2 = -\frac{25}{4} \\
&\iff \quad \Big(z + \frac{1}{2}i = \frac{5}{2}i \quad \text{oder} \quad z + \frac{1}{2}i = -\frac{5}{2}i\Big) \\
&\iff \quad \big(z = 2i \quad \text{oder} \quad z = -3i\big).
\end{aligned}
$$

Hieraus ergibt sich die Linearfaktorzerlegung

$$q(z) = z(z + 1)(z - 2i)(z + 3i).$$

Aufgabe 2

a) Wegen $a_n = \frac{2n}{n+1} = \frac{2}{1+\frac{1}{n}}$ vermuten wir, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$ gegen 2 konvergiert.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$|a_n - 2| = \left| \frac{2n - 2(n+1)}{n+1} \right| = \frac{2}{n+1}.$$

Daher ergibt sich

$$|a_n - 2| < \varepsilon \quad \iff \quad \frac{2}{n+1} < \varepsilon \quad \iff \quad n > \frac{2}{\varepsilon} - 1.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{2}{\varepsilon} - 1$. (Ein solches n_0 existiert, weil die Menge der natürlichen Zahlen nicht nach oben beschränkt ist.) Wie eben gesehen, gilt dann $|a_n - 2| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant n_0$. Also konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 2.

Ist $\varepsilon := 10^{-10}$, so kann man beispielsweise $n_0 := 2 \cdot 10^{10} > 2 \cdot 10^{10} - 1 = \frac{2}{\varepsilon} - 1$ nehmen. Damit gilt $|a_n - 2| < 10^{-10}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2 \cdot 10^{10}$.

b) **i)** Wie in der 6. Saalübung nachgerechnet, gilt $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \to 0$ für $n \to \infty$. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt also die Voraussetzung i). Allerdings ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

ii) Definitionsgemäß konvergiert eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert $a \in \mathbb{C}$, falls es zu jedem $\widetilde{\varepsilon} > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so gibt, dass $|a_n - a| < \widetilde{\varepsilon}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant n_0$ gilt.

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genüge der Voraussetzung ii). Wir behaupten, dass dann $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert. Denn:

Sei $\widetilde{\varepsilon} > 0$. Setze $\varepsilon := \sqrt{\widetilde{\varepsilon}/2} > 0$. Nach Voraussetzung ii) existiert zu diesem ε ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant n_0$ stets $|a_n - 0| = |a_n| < 2\varepsilon^2 = \widetilde{\varepsilon}$ ist. Gemäß Definition bedeutet dies, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und zwar gegen 0.

iii) Sei etwa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wegen $|a_n + a_{n+1}| = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Bedingung iii) erfüllt. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert jedoch.

Aufgabe 3

a) Diese Folge ist konvergent, denn es gilt

$$\frac{n^2+3n-4}{1+n^2+4n^3} = \frac{1/n+3/n^2-4/n^3}{1/n^3+1/n+4} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{0+0-0}{0+0+4} = 0.$$

b) Ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} := (1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ gesetzt, dann konvergiert $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bekanntlich gegen 0. Wäre $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so müsste nach den Grenzwertsätzen auch die Folge $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren, was aber nicht der Fall ist. Daher ist die Annahme falsch und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

c) Mit der bekannten Formel $\sum_{k=1}^m k = \frac{m(m+1)}{2}$, $m \in \mathbb{N}$, ergibt sich für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{k}{n^4} = \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n^2} k = \frac{n^2(n^2+1)}{2n^4} = \frac{1\cdot(1+n^{-2})}{2}.$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} n^{-2} = 0$ folgt mit den Grenzwertsätzen $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1\cdot(1+0)}{2} = \frac{1}{2}$.

d) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n = \frac{(2\sqrt{n}+3)^2}{(3\sqrt[3]{n}+2)^3} = \frac{(\sqrt{n}\,(2+3/\sqrt{n}))^2}{(\sqrt[3]{n}\,(3+2/\sqrt[3]{n}))^3} = \frac{n\cdot(2+3/\sqrt{n})^2}{n\cdot(3+2/\sqrt[3]{n})^3} = \frac{(2+3/\sqrt{n})^2}{(3+2/\sqrt[3]{n})^3}.$$

Wegen $2+3/\sqrt{n} \to 2$ und $3+2/\sqrt[3]{n} \to 3 \neq 0$ für $n\to\infty$ konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach den Grenzwertsätzen gegen $\frac{2^2}{3^3} = \frac{4}{27}$.

e) Wegen $(u-v)(u+v) = u^2-v^2$, also $u-v = (u^2-v^2)/(u+v)$ für $u+v\neq 0$, ergibt sich

$$\begin{aligned} a_n = \sqrt{9n^2+2n+1}-3n &= \frac{9n^2+2n+1-9n^2}{\sqrt{9n^2+2n+1}+3n} = \frac{2n+1}{\sqrt{9n^2+2n+1}+3n} \\ &= \frac{2+1/n}{\sqrt{9+2/n+1/n^2}+3} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

f) Wir verwenden die geometrische Summenformel

$$q^m - 1 = (q-1)\sum_{k=0}^{m-1} q^k = (q-1)(1+q+\ldots+q^{m-2}+q^{m-1}) \qquad (*)$$

für $m = 10$ und $q = q_n := \sqrt[10]{1+3n^{-4}+n^{-9}} \neq 1$, $n\in\mathbb{N}$ (vgl. Aufgabe 2 b), 4. Übungsblatt). Damit gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = n^4(q_n-1) \overset{(*)}{=} n^4\cdot\frac{q_n^{10}-1}{q_n^9+q_n^8+\ldots+q_n+1} = \frac{n^4(3n^{-4}+n^{-9})}{q_n^9+q_n^8+\ldots+q_n+1} = \frac{3+n^{-5}}{q_n^9+q_n^8+\ldots+q_n+1}.$$

Wegen $q_n \to 1$ und $n^{-5}\to 0$ folgt $a_n \to \frac{3}{10}$ $(n\to\infty)$.

g) Für jedes $n\in\mathbb{N}$ gilt

$$3 = \sqrt[n]{3^n} \leqslant a_n \leqslant \sqrt[n]{3^n+3^n} = \sqrt[n]{2\cdot 3^n} = 3\cdot\sqrt[n]{2}.$$

Wegen $\sqrt[n]{2}\to 1$ $(n\to\infty)$ folgt mit dem Sandwichkriterium: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$.

h) Es gilt $|\frac{3+4i}{15}| = \frac{1}{15}|3+4i| = \frac{1}{15}\sqrt{3^2+4^2} = \frac{1}{3}$ und $|(\frac{3+4i}{15})^n| = |\frac{3+4i}{15}|^n \leqslant (\frac{1}{3})^n$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Wegen $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{3})^n \to 0$ folgt $\lim_{n\to\infty}(\frac{3+4i}{15})^n \to 0$ und somit $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}+(\frac{3+4i}{15})^n = \frac{1}{2}+0 = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 4

a) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Jedoch konvergiert die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n \cdot b_n = (-1)^n$ nicht.

b) Nun seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Behauptet wird, dass die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n \cdot b_n$ gegen 0 konvergiert.

Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, existiert eine Konstante $K > 0$ so, dass $|a_n| \leqslant K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Deshalb ergibt sich für jedes $n \in \mathbb{N}$

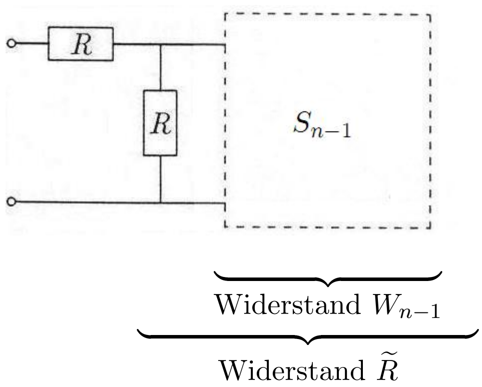
$$|c_n| = |a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leqslant K|b_n|.$$

Wegen $b_n \to 0$ konvergieren auch $|b_n| \to 0$ und $K|b_n| \to 0$ für $n \to \infty$. Mit dem Sandwichkriterium folgt $c_n \to 0$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 5

a) Da in der Schaltung S_1 zwei Widerstände R in Reihe geschaltet sind, ist $W_1 = 2R$.

Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$ sieht die Schaltung S_n folgendermaßen aus:



Da die Widerstände R und W_{n-1} parallel geschaltet sind, gilt

$$\frac{1}{\widetilde{R}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{W_{n-1}} \quad \Longleftrightarrow \quad \widetilde{R} = \frac{RW_{n-1}}{R + W_{n-1}}\,.$$

R und $\widetilde{R}$ sind in Reihe geschaltet, daher ergibt sich für den Gesamtwiderstand von S_n

$$W_n = R + \widetilde{R} = R + \frac{RW_{n-1}}{R + W_{n-1}}\,.$$

Zusammen haben wir

$$W_1 = 2R, \qquad W_n = R + \frac{RW_{n-1}}{R + W_{n-1}} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := W_n/R$ ist gegeben durch

$$a_1 = 2, \qquad a_n = 1 + \frac{a_{n-1}}{1 + a_{n-1}} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Wir zeigen durch vollständige Induktion, dass $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \leqslant a_n \leqslant 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

IA: Wegen $a_1 = 2$ ist $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \leqslant a_n \leqslant 2$ für $n = 1$ erfüllt. Dabei beachte man, dass aus $\sqrt{5} \leqslant 3$ die Gültigkeit der Ungleichung $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \leqslant \frac{1}{2}(1 + 3) = 2$ folgt.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$. Für dieses n gelte $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \leqslant a_n \leqslant 2$ (IV). Dann folgt einerseits

$$a_{n+1} = 1 + \frac{a_n}{1+a_n} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{a_n}+1} \overset{\text{IV}}{\geqslant} 1 + \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})}+1} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$$
$$= 1 + \frac{-2+2\sqrt{5}}{9-5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = \frac{1}{2}\big(1+\sqrt{5}\big)$$

und andererseits

$$a_{n+1} = 1 + \frac{a_n}{1+a_n} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{a_n}+1} \overset{\text{IV}}{\leqslant} 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}+1} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \leqslant 2.$$

Außerdem ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_{n+1} - a_n = 1 + \frac{a_n}{1+a_n} - a_n = \frac{1 + a_n + a_n - a_n(1+a_n)}{1+a_n} = \frac{-a_n^2 + a_n + 1}{1+a_n}$$
$$= -\frac{(a_n - \frac{1+\sqrt{5}}{2})(a_n - \frac{1-\sqrt{5}}{2})}{1+a_n} \leqslant 0, \qquad \text{da } a_n \geqslant \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist als beschränkte und monoton fallende Folge konvergent. Aus

$$a_{n+1} = 1 + \frac{a_n}{1+a_n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

folgt für den Grenzwert $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ nach den Grenzwertsätzen (Man beachte $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$.)

$$a = 1 + \frac{a}{1+a} \iff -a^2 + a + 1 = 0 \iff a = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \;\text{ oder }\; a = \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\,.$$

Wegen $a_n \geqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ muss auch auch $a \geqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ gelten. Deshalb ist $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.