Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Matthias Uhl WS 2011/12

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 8. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$. Dann ist auch $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und gemäß Definition gilt

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}\sup\{a_k+b_k\,:\,k\geqslant n\}\,.$$

Wegen $\{a_k+b_k\,:\,k\geqslant n\}\subset\{a_k+b_l\,:\,k,l\geqslant n\}$ für jedes $n\in\mathbb{N}$ gilt nach Satz (2) in 4.5: $\sup\{a_k+b_k\,:\,k\geqslant n\}\leqslant\sup\{a_k+b_l\,:\,k,l\geqslant n\}$. Damit folgt

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n)&=\lim_{n\to\infty}\sup\{a_k+b_k\,:\,k\geqslant n\}\leqslant\lim_{n\to\infty}\sup\{a_k+b_l\,:\,k,l\geqslant n\}\\&\overset{\text{A. 2, 3. Üb.}}{=}\lim_{n\to\infty}\big(\sup\{a_k\,:\,k\geqslant n\}+\sup\{b_l\,:\,l\geqslant n\}\big)=\limsup_{n\to\infty}a_n+\limsup_{n\to\infty}b_n\,.\end{aligned}$$

Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}:=((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}:=((-1)^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, so gilt $a_n+b_n=0$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Daher ist

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n)=0<1+1=\limsup_{n\to\infty}a_n+\limsup_{n\to\infty}b_n\,.$$

b) Seien $a\in\mathbb{C}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Beh.: $\lim_{n\to\infty}a_n=a \iff \limsup_{n\to\infty}|a_n-a|=0$.

"$\Longrightarrow$": Es gelte $\lim_{n\to\infty}a_n=a$. Nach 6.2 (2) gilt dann $\lim_{n\to\infty}|a_n-a|=0$, also auch $\limsup_{n\to\infty}|a_n-a|=0$.

"$\Longleftarrow$": Nun gelte $\limsup_{n\to\infty}|a_n-a|=0$. Wegen $|a_n-a|\geqslant 0$ für alle $n\in\mathbb{N}$ ergibt sich $\liminf_{n\to\infty}|a_n-a|\geqslant 0$. Deshalb erhält man

$$0\leqslant\liminf_{n\to\infty}|a_n-a|\leqslant\limsup_{n\to\infty}|a_n-a|=0\,,$$

was auf $\liminf_{n\to\infty}|a_n-a|=\limsup_{n\to\infty}|a_n-a|=0$ führt. Also ist $(|a_n-a|)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim_{n\to\infty}|a_n-a|=0$. Nach 6.2 (2) gilt dann $\lim_{n\to\infty}a_n=a$.

Aufgabe 2

a) Die Bernoullische Ungleichung liefert $2^n=(1+1)^n\geqslant 1+n\cdot 1\geqslant n$ für alle $n\in\mathbb{N}$, d. h. es ist stets $\sqrt[n]{n}\leqslant 2$. Somit ergibt sich für alle $n\in\mathbb{N}$

$$\left|\frac{\sqrt[n]{n}}{n!}\right|\leqslant\frac{2}{n!}=:b_n\,.$$

Bekanntlich konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ (mit Reihenwert e), also ist auch $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ konvergent, und die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{n!}$ folgt mit dem Majorantenkriterium. Insbesondere konvergiert die Reihe.

b) Es gilt für alle $n\in\mathbb{N}$

$$\sqrt{1+n^2}-n=\frac{1+n^2-n^2}{\sqrt{1+n^2}+n}=\frac{1}{\sqrt{1+n^2}+n}\geqslant\frac{1}{\sqrt{4n^2}+n}=\frac{1}{3n}=:c_n\geqslant 0\,.$$

Da die Reihe über c_n divergiert, gilt dies nach dem Minorantenkriterium auch für die zu untersuchende Reihe. Insbesondere ist die Reihe nicht absolut konvergent.

c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 3$ gilt $|\frac{1}{2} + \frac{1}{n}| \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ und daher $|(\frac{1}{2} + \frac{1}{n})^n| \leqslant (\frac{5}{6})^n$. Die geometrische Reihe $\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{5}{6})^n$ ist also eine konvergente Majorante von $\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{2} + \frac{1}{n})^n$. Nach dem Majorantenkriterium ist $\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{2}+\frac{1}{n})^n$ absolut konvergent, also insbesondere konvergent.

d) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir $a_n := \frac{(-1)^n}{3n+(-1)^n} = (-1)^n b_n$ mit $b_n := \frac{1}{3n+(-1)^n}$. Die Folge (b_n) konvergiert gegen 0. Ferner ist (b_n) monoton fallend, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} \geqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3(n+1) + (-1)^{n+1}}{3n + (-1)^n} \geqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3 \geqslant (-1)^n - (-1)^{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad 3 \geqslant 2(-1)^n$$

und die letzte Ungleichung ist offenkundig wahr. Nach dem Leibnizkriterium konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$. Wegen

$$|a_n| = \frac{1}{3n + (-1)^n} \geqslant \frac{1}{3n + n} = \frac{1}{4n}$$

und der Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n}$ eine divergente Minorante für $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Deshalb ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht absolut konvergent.

e) Wir wissen, dass $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ gilt. Daher ist die Folge $(\sqrt[n]{n})$ beschränkt, d.h. es gibt eine Konstante C so, dass $\sqrt[n]{n} \leqslant C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Hiermit erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}$

$$n^{-1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{n}} \geqslant \frac{1}{Cn}\,.$$

Da die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent ist, folgt die Divergenz der zu untersuchenden Reihe aus dem Minorantenkriterium. Insbesondere ist die Reihe nicht absolut konvergent.

Aufgabe 3

a) Offenbar ist $a_1 = 2 > 0$. Für jedes $n > 1$ gilt wegen $n > \sqrt{n}$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} > \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0.$$

Die Konvergenz von (a_n) gegen 0 folgt aus $1/\sqrt{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $1/n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und den Grenzwertsätzen.

b) Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$s_N := \sum_{n=1}^{N}(-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{-1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}.$$

Die erste Summe ist die N-te Partialsumme der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, die nach dem Leibnizkriterium konvergiert; insbesondere ist die Folge ihrer Partialsummen $\big(\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\big)_{N\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt, d. h. es gibt eine Konstante C mit $\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \leqslant C$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$s_N \leqslant C - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} \qquad \text{für jedes } N \in \mathbb{N}.$$

Aufgrund von $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \to \infty$ für $N \to \infty$ folgt $s_N \xrightarrow{N\to\infty} -\infty$, d. h. die gegebene Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ ist tatsächlich divergent.

c) Das Leibnizkriterium ist nicht anwendbar, weil die Folge (a_n) nicht monoton ist.

Aufgabe 4

a) Es sei $p \in \mathbb{N}$ fest sowie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a. Um die Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+p})$ zu beweisen, betrachten wir die Folge der N-ten Partialsummen (s_N) und zeigen, dass diese für $N \to \infty$ konvergiert. Für jedes $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geqslant p$ gilt

$$s_N = \sum_{n=0}^{N}(a_n - a_{n+p}) = \sum_{n=0}^{N} a_n - \sum_{n=0}^{N} a_{n+p} = \sum_{n=0}^{p-1} a_n + \underbrace{\sum_{n=p}^{N} a_n}_{=\sum_{k=0}^{N-p} a_{k+p}} - \sum_{n=0}^{N-p} a_{n+p} - \sum_{n=N-p+1}^{N} a_{n+p}$$

$$= \sum_{n=0}^{p-1} a_n - \sum_{n=N-p+1}^{N} a_{n+p}.$$

Wegen $\lim_{N\to\infty} a_{N+1} = a, \lim_{N\to\infty} a_{N+2} = a, \ldots, \lim_{N\to\infty} a_{N+p} = a$ folgt

$$\sum_{n=N-p+1}^{N} a_{n+p} = a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots + a_{N+p} \xrightarrow{N\to\infty} \underbrace{a + a + \ldots + a}_{p \text{ Summanden}} = p\,a.$$

Demnach konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+p})$ und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+p}) = \lim_{N\to\infty} s_N = \sum_{n=0}^{p-1} a_n - p\,a.$$

b) **i)** Sei $p \in \mathbb{N}$ fest. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant p+1$ gilt

$$\frac{1}{n^2 - p^2} = \frac{1}{(n-p)(n+p)} = \frac{1}{2p}\Big(\frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p}\Big).$$

Damit ergibt sich

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{n^2-p^2} = \frac{1}{2p}\sum_{n=p+1}^{\infty}\Big(\frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p}\Big) \overset{k:=n-(p+1)}{=} \frac{1}{2p}\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{k+p+1-p} - \frac{1}{k+p+1+p}\Big)$$

$$= \frac{1}{2p}\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2p+1}\Big) = \frac{1}{2p}\sum_{k=0}^{\infty}(a_k - a_{k+2p}) \quad \text{mit } a_k := \frac{1}{k+1}.$$

Da die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gegen $a = 0$ konvergiert, liefert der a)-Teil, dass die Reihe $\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{n^2-p^2}$ konvergiert und

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{n^2-p^2} = \frac{1}{2p}\sum_{k=0}^{\infty}(a_k - a_{k+2p}) = \frac{1}{2p}\sum_{k=0}^{2p-1} a_k - 2p\cdot 0 = \frac{1}{2p}\sum_{k=0}^{2p-1}\frac{1}{k+1} = \frac{1}{2p}\sum_{n=1}^{2p}\frac{1}{n}.$$

ii) Sei $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. Mit Hilfe von $\frac{y}{1-y^2} = \frac{1}{1-y} - \frac{1}{1-y^2}$ (für $y = x^{2^n}$) erhalten wir

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{1-x^{2^n}} - \frac{1}{1-x^{2^{n+1}}}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) \quad \text{mit } a_n := \frac{1}{1-x^{2^n}}.$$

Die Folge (a_n) ist konvergent mit Grenzwert 1, falls $|x| < 1$, und Grenzwert 0, falls $|x| > 1$. Gemäß a) konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ und ihr Wert lautet

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = a_0 - 1\cdot\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \frac{1}{1-x} - 1 & \text{für } |x| < 1 \\ \frac{1}{1-x} & \text{für } |x| > 1 \end{cases}.$$

Aufgabe 5

a) Gegeben seien $q \in [0,1)$ und eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{C}$ mit

$$|a_{n+1} - a_n| \leqslant q \cdot |a_n - a_{n-1}| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{$*$}$$

Mit Hilfe von vollständiger Induktion rechnen wir zunächst nach

$$|a_{n+1} - a_n| \leqslant q^n \cdot |a_1 - a_0| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{$**$}$$

IA ($n = 1$): Wegen ($*$) ist $|a_2 - a_1| \leqslant q^1 \cdot |a_1 - a_0|$.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gelte $|a_{n+1} - a_n| \leqslant q^n \cdot |a_1 - a_0|$ (IV). Dann erhält man

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \overset{(*)}{\leqslant} q \cdot |a_{n+1} - a_n| \overset{(IV)}{\leqslant} q \cdot q^n \cdot |a_1 - a_0| = q^{n+1} \cdot |a_1 - a_0|.$$

Wir zeigen nun

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall k \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geqslant n_0 : \quad |a_{n+k} - a_n| < \varepsilon.$$

Für beliebige $k, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} a_{n+k} - a_n &= a_{n+k} + \left(\sum_{j=0}^{k-2} a_{n+j+1}\right) - \left(\sum_{l=0}^{k-2} a_{n+l+1}\right) - a_n \\ &\overset{j:=l+1}{=} a_{n+k} + \left(\sum_{j=0}^{k-2} a_{n+j+1}\right) - \left(\sum_{j=1}^{k-1} a_{n+j}\right) - a_n \\ &= \left(\sum_{j=0}^{k-1} a_{n+j+1}\right) - \left(\sum_{j=0}^{k-1} a_{n+j}\right) = \sum_{j=0}^{k-1} (a_{n+j+1} - a_{n+j}). \end{aligned}$$

Mit der Dreiecksungleichung, ($**$) und der geometrischen Summenformel ergibt sich

$$\begin{aligned} |a_{n+k} - a_n| &\leqslant \sum_{j=0}^{k-1} |a_{n+j+1} - a_{n+j}| \leqslant \sum_{j=0}^{k-1} q^{n+j} |a_1 - a_0| = q^n \sum_{j=0}^{k-1} q^j \, |a_1 - a_0| \\ &= q^n \, \frac{1 - q^k}{1 - q} \, |a_1 - a_0| \leqslant \frac{q^n}{1 - q} \, |a_1 - a_0|. \end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $0 \leqslant q < 1$ konvergiert die Folge $(\frac{q^n}{1-q} \, |a_1 - a_0|)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0, daher finden wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{q^n}{1-q} \, |a_1 - a_0| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant n_0$. Demzufolge ist

$$|a_{n+k} - a_n| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geqslant n_0 \text{ und } k \in \mathbb{N}. \tag{$+$}$$

Hieraus folgt

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \qquad \text{für alle } m, n \in \mathbb{N} \text{ mit } m, n \geqslant n_0.$$

[Denn: Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geqslant n_0$ beliebig. Ohne Einschränkung sei $m > n$. Dann ist $k := m - n \in \mathbb{N}$ und nach ($+$) ergibt sich $|a_m - a_n| = |a_{n+k} - a_n| < \varepsilon$.]

Fazit: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$ und daher konvergent.

b) Bekanntlich ist die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent, d.h. die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k})_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent. Betrachte $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_n := s_{n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Dann genügt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ der Voraussetzung in b), denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|a_{n+1} - a_n| = |s_{n+2} - s_{n+1}| = \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1} = |s_{n+1} - s_n| = |a_n - a_{n-1}|.$$

Allerdings divergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.