Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Matthias Uhl

WS 2011/12
13.12.2011

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

9. Übungsblatt

Aufgabe 1

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^3 e^{-n}$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \big(\sqrt[n]{n}-1\big)^n$ **c)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n}\big(1+(-1)^n\big)$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ **e)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!\,(3n)!}{n!\,(4n)!}$ **f)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$

Aufgabe 2

Was lässt sich mit dem Quotientenkriterium über die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\big(1+\frac{1}{2}(-1)^n\big)^n}{n^2}$$

aussagen? Welches Ergebnis liefert die Anwendung des Wurzelkriteriums?

Aufgabe 3

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch ist. Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

b) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $a_n - b_n \to 0$ für $n \to \infty$. Falls $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

c) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die Reihe

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + - \ldots$$

konvergiert, die daraus durch Umordnung entstehende Reihe

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + + - \ldots$$

jedoch divergiert.

Aufgabe 5

Berechnen Sie das Produkt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$

mit Hilfe

a) des Cauchyprodukts;

b) der Reihenwerte.

Aufgabe 6

Berechnen Sie für $q \in (0,1)$ den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)q^n$.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst das Cauchyprodukt von $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mit sich selbst. Bilden Sie dann das Cauchyprodukt dieser Reihe mit $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$.

Aufgabe 7

Bestimmen Sie jeweils die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, für welche die Reihe konvergiert.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n$

ACHTUNG: Terminänderung
Auf vielfachen Wunsch wird die Übung am Freitag, den 23.12.11, verschoben. Ausweichtermin ist **Mittwoch, der 21.12.11, von 15:45 bis 17:15 Uhr im Fasanengarten-Hörsaal.** Am 23.12. findet *keine* Übung statt.

Hinweis:
Die **Klausur zu HM I** findet am Montag, den 12.03.2012, 08:00-10:00 Uhr statt.
Zur Teilnahme ist eine Anmeldung erforderlich, welche über das KIT-Studierendenportal vorgenommen werden kann. **Anmeldeschluss ist Freitag, der 10.02.2012.**