Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Matthias Uhl

WS 2011/12
20.12.2011

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

10. Übungsblatt

Aufgabe 1

Zeigen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme die folgenden Formeln für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

a) $\sin(2x) = 2\sin x\,\cos x$

b) $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

Aufgabe 2

Berechnen Sie jeweils die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ bzw. $z \in \mathbb{C}$, in denen die Potenzreihe konvergiert.

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2}(x-5)^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}(z-2i)^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n)}x^{2n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) z^n$

e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{k^2}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2}$

Aufgabe 3

Welche Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ werden durch die folgenden Potenzreihen dargestellt?

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!} z^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z+1)^{2n+2}$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie jeweils eine Potenzreihenentwicklung der Funktion f um die angegebene Entwicklungsstelle z_0. Wie groß ist dabei der Konvergenzradius?

a) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \sin z\,, \quad z_0 = 1$

b) $f\colon \mathbb{C} \setminus \{-1, 1/2\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \dfrac{1-z}{1-z-2z^2}\,, \quad z_0 = 0$

c) $f\colon \mathbb{C} \setminus \{-1, 1/2\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \dfrac{1-z}{1-z-2z^2}\,, \quad z_0 = 2$

Hinweis: Benutzen Sie in **a)** das Additionstheorem für Sinus. In **b)** und **c)** hilft die Gleichung $\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{2/3}{1+z} + \frac{1/3}{1-2z}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1/2\}$ weiter.

— bitte wenden —

Aufgabe 5

a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

i) Zeigen Sie mit Hilfe der Stetigkeitsdefinition, dass f in jedem Punkt $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ unstetig ist.

Hinweis: Zu jedem $r \in \mathbb{R}$ gibt es eine Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rationaler Zahlen mit $q_n \xrightarrow{n\to\infty} r$.

ii) Begründen Sie mit Hilfe des ε-δ-Kriteriums, dass f in 0 stetig ist.

b) Bestimmen Sie jeweils alle Stellen, in denen die Funktion f stetig ist.

i) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} & \text{für } x \notin \{1,3\} \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 1 \\ 0 & \text{für } x = 3 \end{cases}$

ii) $f\colon [-7,3] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \min\{x^2+2x-15,\ x^3\} & \text{für } x \in [-7,-5] \cup [-1,3] \\ x+5 & \text{für } x \in (-5,-1) \end{cases}$

Aufgabe 6

Untersuchen Sie, ob die Grenzwerte existieren, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

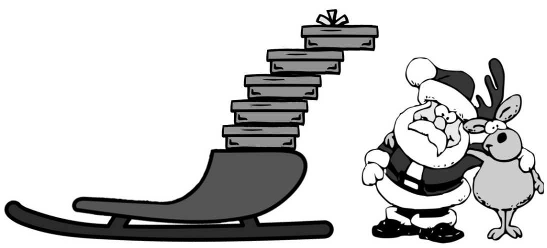
a) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{3-\sqrt{x}}{x-9}$ **b)** $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{8x^3+2x^2+1}{2x^3+7x}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+7x+2}{x^3-x^2+3x}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3} \right)$ **e)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+x}-2}{x}$ **f)** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-x}{x^2-x-6}$

g) $\lim\limits_{x\to \infty} x^{3/2} \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x} \right)$ **h)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4-11x^3+34x^2-36x+8}{3x^4-16x^3+29x^2-20x+4}$

Der Weihnachtsmann braucht Ihre Hilfe!

Der Weihnachtsmann hat fünf Geschenkpakete auf seinen Schlitten gestapelt. Nach rasanter Fahrt haben sich die Pakete wie im nebenstehenden Bild nach hinten verschoben und sind beinahe vom Schlitten gekippt. Es scheint, als ob sich das oberste Geschenk sogar nicht einmal mehr über der Ladefläche befindet. Der Weihnachtsmann fragt sich, ob das tatsächlich zutreffen kann. Außerdem grübelt er, wie weit er wohl „nach hinten bauen“ könnte, wenn er beliebig viele Geschenke zur Verfügung hätte. Können Sie dem Weihnachtsmann weiterhelfen?



Hinweis: Wir nehmen natürlich an, dass alle Pakete gleichartige, homogene, gleichausgerichtete Quader sind und sich nur in Längsrichtung verschieben. Überlegen Sie sich, wie weit das oberste Paket über das zweitoberste hinausragen darf, wie weit die beiden obersten Pakete über das drittoberste hinausragen dürfen, usw. Zeigen Sie anschließend induktiv, wie weit man mit einer festen, aber beliebigen Anzahl an Paketen maximal kommt.

Wir wünschen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr 2012 !