Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Matthias Uhl

WS 2011/12
10.01.2012

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

11. Übungsblatt

Aufgabe 1

Untersuchen Sie, ob die Grenzwerte existieren, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

a) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{e^x - e^a}{x-a}$ $\quad (a \in \mathbb{R}$ fest$)$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie: $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1.$

Hinweis: Man kann mit dem Ergebnis aus Aufgabe 1 a) argumentieren.

b) Folgern Sie hieraus $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3

a) Berechnen Sie alle $x \in (0,\infty)$, die $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x}\,)^x$ erfüllen.

b) Bestimmen Sie jeweils alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt

i) $2^{x-1} + 3^{x+1} = 2^{x+4} + 3^{x-1}\,;$ $\qquad$ **ii)** $x^{\log_{10} x} = 100\,x\,.$

c) Beweisen Sie:

$$\log_2\big(\sqrt{7} - \sqrt{3}\,\big) = 2 - \log_2\big(\sqrt{7} + \sqrt{3}\,\big)\,.$$

Aufgabe 4

Die Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{für } 0 < |x| \leqslant 1, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

b) Bestimmen Sie den Wertebereich $f([-1,1])$ von f.

Hinweis: Rechnen Sie zunächst $|f(x)| \leqslant 1$ für alle $x \in [-1,1]$ nach.

c) Zeigen Sie, dass f eine Umkehrfunktion f^{-1} besitzt, und berechnen Sie diese.

d) Beweisen Sie, dass f^{-1} streng monoton wachsend ist.

e) Ist f streng monoton wachsend? Begründen Sie Ihre Antwort.

— bitte wenden —

Aufgabe 5

a) Gegeben seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und eine stetige Funktion $g\colon [a, b] \to [a, b]$. Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in [a, b]$ existiert mit $g(x_0) = x_0$. (Ein solches x_0 heißt *Fixpunkt von g*).

b) Die Funktion $f\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \frac{x+2}{x+3}, \qquad x \in [0, 2].$$

i) Zeigen Sie mit Hilfe von **a)**, dass f einen Fixpunkt besitzt.

ii) Nun sei $y_0 \in [0, 2]$ gegeben. Die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ werde rekursiv definiert durch

$$y_n := f(y_{n-1}) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Begründen Sie mit Hilfe des Monotoniekriteriums, dass $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Aufgabe 6

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Zeigen Sie: Wenn die Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig ist und $f(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt, dann ist die Funktion $1/f$ beschränkt.

Hinweise zur HM I - Übungsklausur:

Zur Teilnahme an der HM I - Übungsklausur am Samstag, den 28.01.2012, von 08:00 bis 10:00 Uhr ist keine Anmeldung erforderlich. Hörsaalverteilung der HM I - Übungsklausur:

Fachrichtung	Anfangsbuchstabe Nachname	Hörsaal
ETIT	A-I	Benz-Hörsaal
ETIT	J-R	Daimler-Hörsaal
ETIT	S-Z	Hertz-Hörsaal

Zugelassene Hilfsmittel zur HM I - Übungsklausur:
Ausschließlich zwei handbeschriebene DIN A4 - Blätter (insgesamt vier Seiten).

Weitere Informationen zur HM I - Übungsklausur finden Sie auf der Vorlesungshomepage.