Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Matthias Uhl

WS 2011/12
17.01.2012

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

12. Übungsblatt

Aufgabe 1

Begründen Sie, dass die Funktionen

$$g\colon \left[\tfrac{3}{2}\pi, \tfrac{5}{2}\pi\right] \to [-1,1],\ x \mapsto \sin(x)\,, \qquad h\colon \left[-\tfrac{3}{2}\pi, -\tfrac{1}{2}\pi\right] \to [-1,1],\ x \mapsto \sin(x)$$

bijektiv sind, drücken Sie ihre Umkehrabbildungen g^{-1}, h^{-1} mit Hilfe des Arcussinus aus und skizzieren Sie die Schaubilder von g, h, g^{-1}, h^{-1}.

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil, Betrag und Argument von

$$z_1 = \left(1 - i\sqrt{3}\right)^{42}, \qquad z_2 = \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{201}.$$

b) Skizzieren Sie in der komplexen Zahlenebene die Menge

$$\left\{\, z^2 \mid z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ mit } |z| < 3 \text{ und } \arg(z) \in (0, \tfrac{3}{4}\pi) \,\right\}.$$

c) Es sei $t \in (0, 2\pi)$. Ermitteln Sie die Polarkoordinaten von $z(t) := 1 - e^{it}$.

d) Gegeben sei die komplexe Zahl $z = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$. Berechnen Sie z^3 und z^{150}.

Aufgabe 3

Rechnen Sie die folgenden Gleichungen nach.

a) $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y, x+y \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

b) $\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|\arctan x + \arctan y| < \frac{\pi}{2}$

c) $\left(\cosh x + \sinh x\right)^n = \cosh(nx) + \sinh(nx)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$

d) $\operatorname{Artanh} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ für alle $x \in (-1, 1)$

Aufgabe 4

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei die Funktion $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin(x^{-1}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, für welche $n \in \mathbb{N}_0$ die Funktion f_n an der Stelle 0 stetig ist und für welche $n \in \mathbb{N}_0$ sie dort differenzierbar ist.

— bitte wenden —

Aufgabe 5

Seien $\alpha > 1$ und $C > 0$. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C\,|x-y|^\alpha \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}\,.$$

Zeigen Sie, dass dann f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist und $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 6

Sei $D \subset \mathbb{R}$ nichtleer und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt *gleichmäßig stetig* (auf D), falls

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x, y \in D: \quad |x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon\,.$$

a) Begründen Sie: Ist f gleichmäßig stetig, so ist f stetig auf D.

b) Ist die Funktion $g\colon (0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ gleichmäßig stetig?

c) Zeigen Sie: Ist D abgeschlossen und beschränkt und f stetig auf D, dann ist f gleichmäßig stetig.

Warum dient die Funktion g aus Teil **b)** nicht als Gegenbeispiel für diese Aussage?

Hinweis: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis und nehmen Sie dazu an, dass f nicht gleichmäßig stetig ist. Durch Negation der Aussage in der Definition der gleichmäßigen Stetigkeit erhalten Sie mit der speziellen Wahl $\delta = \frac{1}{n}$ (für $n \in \mathbb{N}$) zwei Zahlen in D, die gewissen Ungleichungen genügen. Dies liefert zwei Zahlenfolgen in D, auf die man ein ähnliches Teilfolgenargument anwenden kann wie im Beweis des Satzes über die Existenz von Maximum und Minimum stetiger Funktionen auf abgeschlossenen und beschränkten Mengen.

Hinweis:
Die **Klausur zu HM I** findet am Montag, den 12.03.2012, 08:00-10:00 Uhr statt.
Zur Teilnahme ist eine Anmeldung erforderlich, welche über das KIT-Studierendenportal vorgenommen werden kann. **Anmeldeschluss ist Freitag, der 10.02.2012.**