Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Matthias Uhl

WS 2011/12
24.01.2012

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

13. Übungsblatt

Aufgabe 1

Bestimmen Sie jeweils alle $x \in D$, in denen die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, und berechnen Sie für diese x die Ableitung $f'(x)$.

a) $D = (0, \infty)\,,\quad f(x) = x^x$

b) $D = \mathbb{R}\,,\quad f(x) = |x|^3$

c) $D = \mathbb{R}\,,\quad f(x) = \begin{cases} -2 & \text{falls } x < 0 \\ 2 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$

d) $D = \mathbb{R}\,,\quad f(x) = |\sin x|$

e) $D = \mathbb{R}\,,\quad f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\big(e^{\frac{1}{|x|}} - \ln(x^4)\big) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$

f) $D = (-\frac{1}{2}, 1)\,,\quad f(x) = \begin{cases} x^2 g(x) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases},$

wobei $g\colon (-\frac{1}{2}, 1) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare und beschränkte Funktion sei.

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$.

a) $D = \mathbb{R}\,,\quad f(x) = x^5 - 3x^2 + 2x + 17$

b) $D = \mathbb{R}\,,\quad f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

c) $D = (0, \infty)\,,\quad f(x) = \sqrt{x}$

d) $D = (0, \infty)\,,\quad f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

e) $D = \mathbb{R}\,,\quad f(x) = \sin(x)e^x + x^2$

f) $D = \mathbb{R}\,,\quad f(x) = \dfrac{\cos x}{\cosh x}$

g) $D = (1, \infty)\,,\quad f(x) = \ln(\ln x)$

h) $D = (0, \infty)\,,\quad f(x) = x^{(x^x)}$

i) $D = (0, \infty)\,,\quad f(x) = (x^x)^x$

j) $D = (0, \infty)\,,\quad f(x) = x^{(2^x)} + x^{(x^2)} + 2^{(x^x)}$

Aufgabe 3

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x) := 1 - 8(e^{2x} + 4)^{-1}$.

a) Begründen Sie, dass f injektiv ist, und zeigen Sie $f'(x) = 1 - (f(x))^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Berechnen Sie damit die Ableitung der Umkehrfunktion von f.

c) Bestimmen Sie eine explizite Darstellung von f^{-1} und berechnen Sie damit erneut die Ableitung von f^{-1}.

d) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an das Schaubild von f in $x_0 = 0$ sowie die Gleichung der Tangente an das Schaubild von f^{-1} in $y_0 = -\frac{3}{5}$.

— bitte wenden —

Aufgabe 4

a) Berechnen Sie die Ableitung von $\arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi]$ in den Stellen, in denen arccos differenzierbar ist.

b) Der *Cotangens* ist definiert durch

$$\cot\colon \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x}\,.$$

Zeigen Sie, dass die Funktion cot auf $(0,\pi)$ streng monoton fallend ist und $\cot(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ gilt. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion $\operatorname{arccot}\colon \mathbb{R} \to (0,\pi)$.

Aufgabe 5

Begründen Sie, dass jede der folgenden Funktionen ihr Maximum und Minimum annimmt, und berechnen Sie diese:

a) $f\colon [-3,2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^4 - 4x^2 + 2\,;$

b) $g\colon [0,10] \to \mathbb{R},\ x \mapsto -6x + (|x-3| + 2)^2\,.$

Aufgabe 6

a) Berechnen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes den Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \left(\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x-1}\,\right).$$

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes für alle $x > y > 0$:

i) $x\ln x - y\ln y \leqslant (x-y)(1+\ln x)\,;$ **ii)** $e^{x^2} - e^{y^2} \leqslant (x-y)(x+y)\,e^{x^2}\,.$

ZUSÄTZLICHE VORLESUNGEN:
Am Mittwoch, den 01.02., von 15:45 - 17:15 Uhr im Benz-Hörsaal und am Mittwoch, den 08.02., von 15:45 - 17:15 Uhr im Fasanengarten-Hörsaal finden zusätzliche Vorlesungen statt als Ersatz für die wegen Feiertag und Krankheit ausgefallenen Veranstaltungen.
Die am Mittwoch, den 25.01., geplante Veranstaltung entfällt.