Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Matthias Uhl

WS 2011/12

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 13. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Wegen $f(x) = x^x = e^{x \ln x}$ ist f als Komposition auf D differenzierbarer Funktionen differenzierbar auf D. Ketten- und Produktregel liefern für jedes $x > 0$

$$f'(x) = e^{x \ln x}(x \ln x)' = x^x(1 \cdot \ln x + x \cdot x^{-1}) = (1 + \ln x)x^x \,.$$

b) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{für } x \geqslant 0\,, \\ -x^3 & \text{für } x < 0\,. \end{cases}$$

Nach Beispiel (3) in 10.1 ist f auf $(0, \infty)$ differenzierbar mit $f'(x) = 3x^2$, $x > 0$. Ebenso ist f auf $(-\infty, 0)$ differenzierbar mit $f'(x) = -3x^2$, $x < 0$. Wegen

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \to 0+} x^2 = 0$$

und

$$\lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} \frac{-x^3}{x} = \lim_{x \to 0-} -x^2 = 0$$

gilt $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$, d.h. f ist in 0 differenzierbar mit $f'(0) = 0$.
Fazit: f ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{für } x \geqslant 0\,, \\ -3x^2 & \text{für } x < 0\,. \end{cases}$$

c) Da f auf $(-\infty, 0)$ und auf $(0, \infty)$ konstant ist, ist f auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar und es gilt $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wegen $\lim_{x \to 0-} f(x) = -2 \neq 2 = \lim_{x \to 0+} f(x)$ ist f nicht stetig in der Stelle 0, also erst recht nicht differenzierbar in 0.

d) Die Funktion f lässt sich offenbar auch als

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \\ \sin x & \text{falls } x \in (k\pi, (k+1)\pi) \text{ mit } k \in \mathbb{Z},\ k \text{ gerade} \\ -\sin x & \text{falls } x \in (k\pi, (k+1)\pi) \text{ mit } k \in \mathbb{Z},\ k \text{ ungerade} \end{cases}$$

schreiben.
Weil sin auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, ist f auf $\mathbb{R} \setminus \{\, k\pi : k \in \mathbb{Z} \,\}$ differenzierbar und es gilt dort

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & \text{falls } x \in (k\pi, (k+1)\pi) \text{ mit } k \in \mathbb{Z},\ k \text{ gerade} \\ -\cos x & \text{falls } x \in (k\pi, (k+1)\pi) \text{ mit } k \in \mathbb{Z},\ k \text{ ungerade} \end{cases}.$$

In den Punkten $\{\, k\pi : k \in \mathbb{Z} \,\}$ ist f nicht differenzierbar: Wir untersuchen zunächst die Stellen $x_0 = k\pi$ mit geradem $k \in \mathbb{Z}$ und zeigen, dass der Grenzwert $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ nicht existiert:

Es gilt nämlich

$$\lim_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0+}\frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0}=\sin'(x_0)=\cos(x_0)=1 \qquad \text{und}$$

$$\lim_{x\to x_0-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0-}\frac{-\sin x-(-\sin x_0)}{x-x_0}=(-\sin)'(x_0)=-\cos(x_0)=-1.$$

Also ist f in diesen Punkten nicht differenzierbar. An den Stellen $k\pi$ mit ungeradem $k\in\mathbb{Z}$ kann man analog zeigen, dass die einseitigen Grenzwerte des Differenzenquotienten gegen -1 und 1 konvergieren, weswegen f dann auch in diesen Punkten nicht differenzierbar ist.

e) Für jedes $x>0$ gilt

$$f(x)=x^2\,\sin\big(e^{\frac{1}{x}}-\ln(x^4)\big)\,.$$

Als Komposition auf $(0,\infty)$ differenzierbarer Funktionen ist f auf $(0,\infty)$ differenzierbar und für die Ableitung ergibt sich

$$\begin{aligned} f'(x)&=2x\,\sin\big(e^{\frac{1}{x}}-\ln(x^4)\big)+x^2\,\cos\big(e^{\frac{1}{x}}-\ln(x^4)\big)\cdot\big(e^{\frac{1}{x}}\cdot(-\tfrac{1}{x^2})-\tfrac{1}{x^4}\cdot 4x^3\big)\\ &=2x\,\sin\big(e^{\frac{1}{x}}-\ln(x^4)\big)-\big(e^{\frac{1}{x}}+4x\big)\cdot\cos\big(e^{\frac{1}{x}}-\ln(x^4)\big)\,, \qquad x>0\,. \end{aligned}$$

Für jedes $x<0$ gilt

$$f(x)=x^2\,\sin\big(e^{-\frac{1}{x}}-\ln(x^4)\big)\,.$$

Als Komposition auf $(-\infty,0)$ differenzierbarer Funktionen ist f auf $(-\infty,0)$ differenzierbar und für die Ableitung ergibt sich

$$\begin{aligned} f'(x)&=2x\,\sin\big(e^{-\frac{1}{x}}-\ln(x^4)\big)+x^2\,\cos\big(e^{-\frac{1}{x}}-\ln(x^4)\big)\cdot\big(e^{-\frac{1}{x}}\cdot\tfrac{1}{x^2}-\tfrac{1}{x^4}\cdot 4x^3\big)\\ &=2x\,\sin\big(e^{-\frac{1}{x}}-\ln(x^4)\big)+\big(e^{-\frac{1}{x}}-4x\big)\cdot\cos\big(e^{-\frac{1}{x}}-\ln(x^4)\big)\,, \qquad x<0\,. \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}x\,\sin\big(e^{\frac{1}{|x|}}-\ln(x^4)\big)=0\,,$$

weil $|\sin(e^{\frac{1}{|x|}}-\ln(x^4))|\leqslant 1$ für alle $x\neq 0$ ist. Damit ist f in 0 differenzierbar mit $f'(0)=0$.

f) Auf $(-\frac{1}{2},1)\setminus\{0\}$ liefert die Produktregel die Differenzierbarkeit von f; es gilt

$$f'(x)=(x^2)'g(x)+x^2g'(x)=2xg(x)+x^2g'(x) \qquad \text{für alle } x\in(-\tfrac{1}{2},1)\setminus\{0\}\,.$$

Auch in 0 ist f differenzierbar; es ergibt sich nämlich für $x\neq 0$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^2g(x)-0}{x}=xg(x)\xrightarrow{x\to 0}0$$

wegen der Beschränktheit der Funktion g. Also ist $f'(0)=0$.

Aufgabe 2

a) Für jedes $x\in\mathbb{R}$ gilt $f'(x)=5x^4-6x+2$.

b) Nach der Quotientenregel gilt für jedes $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{0-2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$.

c) Wegen $\sqrt{x}=x^{1/2}$ gilt $f'(x)=\frac{1}{2}x^{-1/2}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ für jedes $x>0$.

d) Wegen $\frac{1}{\sqrt{x}}=x^{-1/2}$ gilt $f'(x)=-\frac{1}{2}x^{-3/2}$ für jedes $x>0$.

e) Mit der Produkt- und Kettenregel ergibt sich $f'(x)=\cos(x)e^x+\sin(x)e^x+2x$ für alle $x\in\mathbb{R}$.

f) Nach der Quotientenregel gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{-\sin(x)\cosh(x) - \cos(x)\sinh(x)}{\cosh^2 x}$.

g) Mit Hilfe der Kettenregel erhält man für jedes $x \in (1, \infty)$

$$f'(x) = \ln'(\ln x) \cdot \ln'(x) = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}\,.$$

h) Wir setzen $g(x) := x^x = e^{x \ln x}$, $x \in (0, \infty)$. Nach Aufgabe 1 a) gilt dann $g'(x) = (1 + \ln x)x^x$ für jedes $x > 0$. Außerdem ist $f(x) = x^{g(x)} = e^{g(x)\ln x}$ für jedes $x > 0$. Anwenden von Ketten- und Produktregel liefert

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{g(x)\ln x}\big(g(x)\ln x\big)' \\ &= x^{(x^x)}\big(g'(x)\ln x + g(x)x^{-1}\big) = x^{(x^x)}\big((1+\ln x)x^x \ln x + x^{x-1}\big)\,. \end{aligned}$$

i) Wegen $f(x) = (x^x)^x = x^{x \cdot x} = e^{x^2 \ln x}$ liefert die Produkt- und Kettenregel für alle $x > 0$

$$f'(x) = e^{x^2 \ln x}\big(2x \ln x + x^2 \tfrac{1}{x}\big) = x^{(x^2)} x\big(2\ln x + 1\big) = x^{x^2+1}\big(2\ln x + 1\big)\,.$$

j) Als Komposition auf D differenzierbarer Funktionen ist f differenzierbar auf D. Mit

$$f(x) = e^{(2^x)\cdot \ln x} + e^{x^2 \cdot \ln x} + e^{(x^x)\cdot \ln 2} = e^{e^{x\cdot \ln 2}\cdot \ln x} + e^{x^2\cdot \ln x} + e^{e^{x \ln x}\cdot \ln 2}$$

folgt für jedes $x > 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{e^{x\cdot\ln 2}\cdot \ln x}\big(\ln 2 \cdot e^{x\cdot \ln 2}\ln x + e^{x\cdot\ln 2}\tfrac{1}{x}\big) + e^{x^2\cdot \ln x}\big(2x\ln x + x^2 \tfrac{1}{x}\big) \\ &\quad + e^{e^{x\ln x}\cdot \ln 2}\big(e^{x \ln x}(1\cdot \ln x + x\tfrac{1}{x})\ln 2\big) \\ &= x^{(2^x)}2^x\big(\ln 2 \cdot \ln x + \tfrac{1}{x}\big) + x^{(x^2)}x\big(2\ln x + 1\big) + 2^{(x^x)}x^x(1 + \ln x)\ln 2\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 3

a) Nach der Kettenregel gilt $f'(x) = 8(e^{2x}+4)^{-2} \cdot 2e^{2x} = 16e^{2x}(e^{2x}+4)^{-2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$; also ist f streng monoton wachsend und damit injektiv. Wegen

$$\begin{aligned} 1-(f(x))^2 &= 1 - \big(1 - 8(e^{2x}+4)^{-1}\big)^2 = 1 - \big(1 - 16(e^{2x}+4)^{-1} + 64(e^{2x}+4)^{-2}\big) \\ &= 16(e^{2x}+4)^{-1} - 64(e^{2x}+4)^{-2} = 16(e^{2x}+4)^{-2}\big((e^{2x}+4) - 4\big) = 16e^{2x}(e^{2x}+4)^{-2} \end{aligned}$$

gilt auch die behauptete Gleichung.

b) f hat als Bildbereich $(-1, 1)$, denn $x \mapsto (e^{2x}+4)^{-1}$ hat als Bildbereich $(0, \frac{1}{4})$. Da stets $f'(x) \neq 0$ gilt, liefert der Satz über die Umkehrfunktion, dass $f^{-1} \colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist mit

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \overset{\text{a)}}{=} \frac{1}{1 - (f(f^{-1}(y)))^2} = \frac{1}{1-y^2} \qquad \text{für alle } y \in (-1, 1)\,.$$

c) Wir lösen $f(x) = y$ nach x auf:

$$\begin{aligned} 1 - 8(e^{2x}+4)^{-1} = y &\iff (1-y)^{-1} = \tfrac{1}{8}(e^{2x}+4) \iff 8(1-y)^{-1} - 4 = e^{2x} \\ &\iff x = \tfrac{1}{2}\ln\big(8(1-y)^{-1} - 4\big)\,. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für jedes $y \in (-1, 1)$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8(1-y)^{-1} - 4} \cdot \frac{8}{(1-y)^2} = \frac{4}{8(1-y) - 4(1-y)^2} = \frac{4}{4 - 4y^2} = \frac{1}{1-y^2}\,.$$

d) Es gilt $f(0) = 1 - \frac{8}{5} = -\frac{3}{5}$, $f'(0) = 1 - (-\frac{3}{5})^2 = \frac{16}{25}$, $f^{-1}(-\frac{3}{5}) = 0$ und $(f^{-1})'(-\frac{3}{5}) = \frac{25}{16}$.

$$T(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \qquad \text{also} \qquad T(x) = \tfrac{16}{25}x - \tfrac{3}{5}$$

ist die Gleichung der Tangente an das Schaubild von f in $x_0 = 0$. Für die Tangente an das Schaubild von f^{-1} in $y_0 = -\frac{3}{5}$ ergibt sich die Gleichung

$$T(y) = (f^{-1})'(y_0)(y - y_0) + f^{-1}(y_0), \qquad \text{also} \qquad T(y) = \tfrac{25}{16}y + \tfrac{15}{16}\,.$$

Aufgabe 4

a) Da $\cos\colon (0,\pi) \to (-1,1)$ differenzierbar ist mit $\cos'(x) = -\sin x < 0$ für alle $x \in (0,\pi)$, ist $\arccos\colon (-1,1) \to (0,\pi)$ nach dem Satz über die Umkehrfunktion differenzierbar und für die Ableitung ergibt sich

$$\arccos'(y) = \frac{1}{\cos'(\arccos y)} = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2(\arccos y)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,, \qquad y \in (-1,1),$$

wobei wir $\cos'(x) = -\sin x = -\sqrt{1-\cos^2 x}$ für alle $x \in (0,\pi)$ ausgenutzt haben. In $y = \pm 1$ ist arccos nicht differenzierbar; die Funktion besitzt dort senkrechte Tangenten.

b) Wir bestimmen die Ableitung: Nach der Quotientenregel gilt für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

$$(\cot x)' = \frac{(\cos x)'\sin x - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} \begin{cases} = \frac{-1}{\sin^2 x} \\ = -1 - \cot^2 x \end{cases}$$

und dies bleibt stets negativ, insbesondere auf $(0,\pi)$. Also ist die Cotangens-Funktion dort streng monoton fallend. Wegen

$$\cos x \xrightarrow{x\to 0+} 1\,, \quad \sin x \xrightarrow{x\to 0+} 0\,, \qquad \cos x \xrightarrow{x\to\pi-} -1\,, \quad \sin x \xrightarrow{x\to\pi-} 0$$

und der Positivität der Sinus-Funktion auf $(0,\pi)$ folgt

$$\cot x \xrightarrow{x\to 0+} \infty \qquad \text{und} \qquad \cot x \xrightarrow{x\to\pi-} -\infty\,.$$

Da cot auf $(0,\pi)$ stetig ist, erhält man mit dem Zwischenwertsatz $\cot((0,\pi)) = \mathbb{R}$. (Übrigens: Es gilt $\cot x = \tan(\frac{\pi}{2} - x)$, denn $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ und $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$.)

Für die Ableitung der Umkehrfunktion $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to (0,\pi)$ gilt

$$(\operatorname{arccot} x)' = \frac{1}{\cot'(\operatorname{arccot} x)} = \frac{1}{-1-\cot^2(\operatorname{arccot} x)} = -\frac{1}{1+x^2}\,.$$

(Dies kann man mit $(\arctan x)' = (1+x^2)^{-1}$ auch aus $\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$ erhalten, wobei Letzteres aus $\cot x = \tan(\frac{\pi}{2} - x)$ folgt.)

Aufgabe 5

Sowohl f als auch g sind stetig und auf einem abgeschlossenen, beschränkten Intervall definiert. Daher nehmen diese Funktionen ihr Maximum und Minimum an.

a) Die Funktion f ist auf dem gesamten Intervall $[-3,2]$ differenzierbar. In jeder Maximum- oder Minimumstelle im Innern des Intervalls verschwindet daher die Ableitung von f. Es gilt

$$f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2-2)\,.$$

Die Nullstellen von f' lauten 0 und $\pm\sqrt{2}$. Wir müssen neben diesen drei Stellen (die alle im Intervall $(-3,2)$ liegen!) auch die Ränder des Intervalls $[-3,2]$ untersuchen: $f(0) = 2$, $f(\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}) = -2$, $f(-3) = 47$, $f(2) = 2$. Das Maximum von f ist folglich 47, das Minimum ist -2.

b) Die Funktion g ist auf $(0,3)$ und auf $(3,10)$ differenzierbar. Wir müssen also die Randpunkte von $[0,10]$, den Punkt 3 sowie alle Punkte in $(0,3) \cup (3,10)$ untersuchen, an denen die Ableitung von g verschwindet. Auf $[0,3]$ gilt

$$g(x) = -6x + (3-x+2)^2 = -6x + (5-x)^2 = x^2 - 16x + 25\,, \qquad \text{also } g'(x) = 2x - 16\,.$$

$g'(x) = 0$ gilt nur für $x = 8 \notin (0,3)$, so dass g' in $(0,3)$ keine Nullstelle hat. Auf $[3,10]$ gilt

$$g(x) = -6x + (x-1)^2 = x^2 - 8x + 1\,, \qquad \text{also } g'(x) = 2x - 8\,.$$

$g'(x) = 0$ gilt nur für $x = 4 \in (3,10)$.

Wir müssen also die Funktionswerte von g an den Stellen $0, 3, 4, 10$ vergleichen. Wegen $g(0) = 25$, $g(3) = -14$, $g(4) = -15$, $g(10) = 21$ ist -15 das Minimum und 25 das Maximum von g.

Aufgabe 6

a) Wir betrachten die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\; y \mapsto \cos\sqrt{y}$. Die Kettenregel liefert, dass f auf $(0,\infty)$ differenzierbar ist mit $f'(y) = \frac{-\sin\sqrt{y}}{2\sqrt{y}}$ für alle $y > 0$. Nach dem Mittelwertsatz existiert zu jedem $x > 1$ ein $\xi_x \in (x-1, x+1)$ mit

$$\frac{f(x+1) - f(x-1)}{(x+1) - (x-1)} = f'(\xi_x)\,, \qquad \text{d.h.} \qquad \frac{\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x-1}}{2} = \frac{-\sin\sqrt{\xi_x}}{2\sqrt{\xi_x}}\,.$$

Hieraus ergibt sich die Abschätzung

$$\left|\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x-1}\right| = \left|\frac{\sin\sqrt{\xi_x}}{\sqrt{\xi_x}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\xi_x}} \overset{\xi_x \in (x-1,x+1)}{\leqslant} \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,.$$

Wegen $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 0$ ist der zu bestimmende Grenzwert 0.

b) **i)** Seien $0 < y < x$. Definiere $f\colon [y,x] \to \mathbb{R},\ t \mapsto t\ln t$. Dann ist f auf $[y,x]$ stetig und auf (y,x) differenzierbar mit $f'(t) = 1 \cdot \ln t + t \cdot \frac{1}{t} = 1 + \ln t,\ t \in (y,x)$. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\xi \in (y,x)$ mit

$$x\ln x - y\ln y = (x-y)f'(\xi) = (x-y)(1+\ln\xi) \leqslant (x-y)(1+\ln x)\,,$$

weil $\ln\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist.

ii) Seien $0 < y < x$. Betrachte die Funktion $f\colon [y^2, x^2] \to \mathbb{R},\ u \mapsto e^u$. Da f auf $[y^2,x^2]$ stetig und auf (y^2,x^2) differenzierbar ist, erfüllt f die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes. Danach existiert ein $\xi \in (y^2, x^2)$ mit

$$e^{x^2} - e^{y^2} = f(x^2) - f(y^2) = (x^2 - y^2)f'(\xi) = \underbrace{(x-y)(x+y)}_{\geqslant 0} e^{\xi} \leqslant (x-y)(x+y)e^{x^2}$$

wegen der Monotonie der (reellen) Exponentialfunktion.