Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2011/12
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Matthias Uhl

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 15. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Hier kann man sofort eine Stammfunktion hinschreiben:

$$\int_0^1 (1+2x)^3\,dx = \tfrac18(1+2x)^4\,\Big|_0^1 = \tfrac18(3^4-1^4) = 10\,.$$

b) Wir zerlegen das Intervall:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 |x-1|\,dx &= \int_{-2}^1 |x-1|\,dx + \int_1^2 |x-1|\,dx = \int_{-2}^1 (1-x)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx\\ &= \big(x-\tfrac12x^2\big)\Big|_{-2}^1 + \big(\tfrac12x^2-x\big)\Big|_1^2\\ &= \big(1-\tfrac12\big) - (-2-2) + (2-2) - \big(\tfrac12-1\big) = 5\,.\end{aligned}$$

c) Mit zweimaliger partieller Integration ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_{\pi/4}^{\pi/2} e^x\cos(x)\,dx &= \big[e^x\cos(x)\big]_{\pi/4}^{\pi/2} + \int_{\pi/4}^{\pi/2} e^x\sin(x)\,dx\\ &= \big[e^x\cos(x)+e^x\sin(x)\big]_{\pi/4}^{\pi/2} - \int_{\pi/4}^{\pi/2} e^x\cos(x)\,dx\end{aligned}$$

und somit

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} e^x\cos(x)\,dx = \frac12\big[e^x\cos(x)+e^x\sin(x)\big]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac12\big(e^{\pi/2} - \tfrac{2}{\sqrt2}\,e^{\pi/4}\big)\,.$$

d) Hier kann man eine Stammfunktion leicht finden:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{9-4x^2}}\,dx &= -\frac14\int_0^1 \frac{-8x}{2\sqrt{9-4x^2}}\,dx\\ &= -\tfrac14\sqrt{9-4x^2}\,\Big|_0^1 = -\tfrac14(\sqrt5-\sqrt9\,) = \tfrac14(3-\sqrt5\,)\,.\end{aligned}$$

e) Hier wenden wir die Substitutionsregel mit $g(t)=\sqrt t$ an. Wir ersetzen also $\sqrt t$ durch x und $g'(t)\,dt = (2\sqrt t\,)^{-1}\,dt$ durch dx. Dabei müssen wir auch die Integrationsgrenzen anpassen: $t=1$ entspricht $x=g(1)=1$ und $t=4$ entspricht $x=g(4)=2$.

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{1}{\sqrt t\,(1+\sqrt t\,)}\,dt &= \int_1^4 \frac{2}{1+\sqrt t}\cdot\frac{1}{2\sqrt t}\,dt\\ &= \int_1^2 \frac{2}{1+x}\,dx = 2\ln|1+x|\,\Big|_1^2 = 2\big(\ln(3)-\ln(2)\big) = 2\ln\tfrac32\,.\end{aligned}$$

f) Um dieses Integral zu berechnen, verwenden wir partielle Integration für $f(x) = \ln x$ und $g'(x) = x$. Mit $f'(x) = x^{-1}$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ folgt

$$\begin{aligned}\int_1^e x \ln x \, dx &= \int_1^e f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x)\big|_1^e - \int_1^e f'(x)g(x)\, dx \\ &= \tfrac{1}{2}x^2 \ln x\big|_1^e - \int_1^e \tfrac{1}{2}x^2x^{-1}\, dx = \tfrac{1}{2}(e^2 \ln e - \ln 1) - \int_1^e \tfrac{1}{2}x\, dx \\ &= \tfrac{1}{2}e^2 - \left(\tfrac{1}{4}x^2\right)\big|_1^e = \tfrac{1}{2}e^2 - \tfrac{1}{4}(e^2-1) = \tfrac{1}{4}(e^2+1)\,.\end{aligned}$$

g) Sei $k \in \mathbb{Z}$. Wir betrachten zunächst das Integral ohne Betrag:

$$\begin{aligned}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin x \, dx &= -\cos x\big|_{(k-1)\pi}^{k\pi} = -\cos(k\pi) + \cos((k-1)\pi) \\ &= -(-1)^k + (-1)^{k-1} = (-(-1)+1)(-1)^{k-1} = 2(-1)^{k-1}\,.\end{aligned}$$

Da die Sinusfunktion ihre Nullstellen genau in $k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ hat und stetig ist, ist sin auf dem ganzen Intervall $[(k-1)\pi, k\pi]$ entweder $\geqslant 0$ oder $\leqslant 0$. Folglich gilt

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x| \, dx = \left| \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin x \, dx \right| = 2\,.$$

h) Die Substitution $e^{x^2} = t$, $dt = 2xe^{x^2}\, dx$ führt auf

$$\int_0^1 x\, e^{2x^2} \sin(e^{x^2})\, dx = \frac{1}{2}\int_1^e t \sin t\, dt\,.$$

Mithilfe von partieller Integration ist

$$\frac{1}{2}\int_1^e t\sin t\, dt = -\frac{t}{2}\cos t\Big|_1^e + \frac{1}{2}\int_1^e \cos t\, dt = \left[\frac{-t\cos t + \sin t}{2}\right]_1^e = -\frac{e}{2}\cos e + \frac{\sin e}{2} + \frac{\cos 1 - \sin 1}{2}\,.$$

i) Wir substituieren zunächst $t = \sqrt{x}$, d.h. $x = t^2$. Dann ist $dx = 2t\, dt$ und aus $x : 1 \to 4$ ergibt sich $t : 1 \to 2$

$$\int_1^4 \arctan\sqrt{\sqrt{x}-1}\, dx = \int_1^2 \arctan(\sqrt{t-1}\,) \cdot 2t\, dt\,;$$

nun substituieren wir $u = \sqrt{t-1}$, also $t = u^2+1$, $dt = 2u\, du$, $t : 1 \to 2$ wird zu $u : 0 \to 1$,

$$= \int_0^1 \arctan(u) \cdot 2(u^2+1) \cdot 2u\, du = \int_0^1 (4u^3+4u)\arctan(u)\, du\,.$$

(Natürlich hätten wir die beiden Substitutionen auch zu einer zusammenfassen können.) Dann führen wir eine partielle Integration aus mit $f(u) = \arctan(u)$ und $g'(u) = 4u^3 + 4u$:

$$\begin{aligned}&= (u^4+2u^2)\arctan(u)\big|_0^1 - \int_0^1 (u^4+2u^2)\frac{1}{1+u^2}\, du \\ &= 3\arctan(1) - \int_0^1 \frac{(u^2+1)^2-1}{1+u^2}\, du = \tfrac{3}{4}\pi - \int_0^1 (u^2+1)\, du + \int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\, du \\ &= \tfrac{3}{4}\pi - \left(\tfrac{1}{3}u^3+u\right)\big|_0^1 + \arctan(u)\big|_0^1 = \tfrac{3}{4}\pi - \tfrac{4}{3} + \tfrac{1}{4}\pi = \pi - \tfrac{4}{3}\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 2

a) Wir verwenden partielle Integration mit $f(x) = \arcsin x$ und $g'(x) = 1$:

$$\int \arcsin x\,dx = \int 1 \cdot \arcsin x\,dx = x \arcsin x - \int x \arcsin'(x)\,dx$$
$$= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}\,.$$

b) Hier substituieren wir $u = e^x$. Dies liefert $du = e^x\,dx$ und damit

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{1}{u^2+1}\,du\Big|_{u=e^x} = \arctan(u)\Big|_{u=e^x} = \arctan(e^x)\,.$$

c) Wir substituieren $u = 1-x$. Dies liefert $du = (-1)\,dx$, also

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx = \int \frac{1-u}{\sqrt{u}}(-1)\,du\Big|_{u=1-x} = \int (u^{1/2} - u^{-1/2})\,du\Big|_{u=1-x} = \tfrac{2}{3}u^{3/2} - 2u^{1/2}\Big|_{u=1-x}$$
$$= \tfrac{2}{3}(1-x)^{3/2} - 2(1-x)^{1/2}\,.$$

Aufgabe 3

a) Wir betrachten die Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_0^x \sin(e^t)\ dt$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin x$.
Dann ist f nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) = \sin(e^x)$. Bekanntlich ist auch g auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) = \cos x$. Wegen $F(x) = f(g(x))$ liefert die Kettenregel, dass F auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist mit

$$F'(x) = f'(g(x))\,g'(x) = \sin(e^{\sin x})\,\cos(x) \qquad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}\,.$$

Wegen $G(x) = f(g(x)) - f(x)$ liefert die Kettenregel, dass F auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist mit

$$G'(x) = f'(g(x))\,g'(x) - f'(x) = \sin(e^{\sin x})\,\cos(x) - \sin(e^x) \qquad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}\,.$$

b) Die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_0^x (1+4t)e^{t^2}\,dt$ ist nach dem Hauptsatz auf $\mathbb{R}$ differenzierbar. Daher ist f als Komposition differenzierbarer Funktionen differenzierbar. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(x) = (1+4x)e^{x^2} + e^{x^2} + xe^{x^2}2x = (2+4x+2x^2)e^{x^2} = 2(1+x)^2\,e^{x^2}\,.$$

Also gilt $f'(x) = 0$ genau dann, wenn $x = -1$ ist. Wegen $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ wechselt f' in -1 das Vorzeichen nicht, so dass in -1 keine lokale Extremstelle von f vorliegt. Folglich besitzt f auf $\mathbb{R}$ keine lokalen Extremstellen.

Aufgabe 4

Sei (x_0, y_0) der Schnittpunkt im ersten Quadranten der Geraden mit der Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$.
Für $x, y \geqslant 0$ gilt $x^2 - y^2 = 1$ genau dann, wenn $y = \sqrt{x^2-1}$ ist.
Das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(x_0, 0)$ und (x_0, y_0) hat den Flächeninhalt

$$F_D := \frac{1}{2}\,x_0\,y_0 = \frac{1}{2}\,x_0\sqrt{x_0^2-1}\,.$$

Die gesuchte Fläche erhalten wir, indem wir hiervon die Fläche unter der Hyperbel

$$F_H := \int_1^{x_0} \sqrt{x^2-1}\,dx$$

subtrahieren. Partielle Integration führt auf

$$\begin{aligned}\int_1^{x_0} 1 \cdot \sqrt{x^2-1}\,dx &= \Big(x\sqrt{x^2-1}\Big)\Big|_{x=1}^{x_0} - \int_1^{x_0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\,dx \\ &= x_0\sqrt{x_0^2-1} - \int_1^{x_0} \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx - \int_1^{x_0} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx\,.\end{aligned}$$

Kürzen wir den Integranden im zweiten Summanden und addieren auf beiden Seiten $\int_1^{x_0} \sqrt{x^2-1}\,dx$, so bekommen wir

$$2\int_1^{x_0} \sqrt{x^2-1}\,dx = x_0\sqrt{x_0^2-1} - \int_1^{x_0} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx\,.$$

Wegen $\operatorname{Arcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ für $x > 1$ und $\operatorname{Arcosh}(1) = 0$ folgt

$$\int_1^{x_0} \sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\,x_0\sqrt{x_0^2-1} - \frac{1}{2}\Big(\operatorname{Arcosh}(x)\Big)\Big|_{x=1}^{x_0} = \frac{1}{2}\,x_0\sqrt{x_0^2-1} - \frac{1}{2}\operatorname{Arcosh}(x_0)\,.$$

Also beträgt der gesuchte Flächeninhalt

$$F_D - F_H = \frac{1}{2}\,x_0\sqrt{x_0^2-1} - \left(\frac{1}{2}\,x_0\sqrt{x_0^2-1} - \frac{1}{2}\operatorname{Arcosh}(x_0)\right) = \frac{1}{2}\operatorname{Arcosh}(x_0)\,.$$

Aufgabe 5

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt[n]{e^{-k}} = \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\Big)e^{-\frac{k}{n}}\,.$$

Ist $x_k^{(n)} := \frac{k}{n}$ für $k = 0, 1, \ldots, n$ gesetzt, so ist $Z_n := \{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}\} = \{0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ eine Zerlegung von $[0,1]$ und $\xi^{(n)} := (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}) = (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1)$ ein zu Z_n passender Zwischenvektor. Wir definieren $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{-x}$ und erhalten eine Riemannsche Summe

$$\sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}) := \sum_{k=1}^{n}\Big(x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}\Big) f(x_k^{(n)}) = \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\Big)e^{-\frac{k}{n}}\,.$$

Da f als stetige Funktion über $[0,1]$ integrierbar ist und da $|Z_n| = \frac{1}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$ gilt, ergibt sich gemäß Satz 11.10

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt[n]{e^{-k}} = \lim_{n\to\infty} \sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}) = \int_0^1 f\,dx = \int_0^1 e^{-x}\,dx = \big[-e^{-x}\big]_0^1 = -e^{-1} - (-e^{-0}) = 1 - \frac{1}{e}\,.$$

Aufgabe 6

a) Für beliebiges $R > 2$ erhalten wir mittels der Substitution $t = \ln x$, $dt = x^{-1}\,dx$

$$\int_2^R \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \int_{\ln 2}^{\ln R} \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t}\Big|_{\ln 2}^{\ln R} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln R}\,.$$

Da dies für $R \to \infty$ gegen $(\ln 2)^{-1}$ strebt, konvergiert das uneigentliche Integral $\int_2^\infty \frac{1}{x\,(\ln x)^2}\,dx$ und hat den Wert $(\ln 2)^{-1}$.

b) **i)** Da der Integrand $f(x) := \frac{1}{2\sqrt{x}-x^2}$ auf $(0,1]$ stetig ist, ist f auf jedem Intervall $[\varepsilon, 1]$, $0 < \varepsilon < 1$, integrierbar. Für alle $x \in (0,1]$ gilt $x^2 \leqslant \sqrt{x}$ und damit

$$|f(x)| = \frac{1}{2\sqrt{x} - x^2} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{x} - \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\,.$$

Da das uneigentliche Integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ konvergiert, ist $\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}-x^2}\,dx$ nach dem Majorantenkriterium konvergent.

ii) Da

$$\left|\frac{e^{2x}}{1+e^x}\right| = \frac{e^{2x}}{1+e^x} \leqslant \frac{e^{2x}}{e^x} = e^x$$

für alle $x \in (-\infty, 3]$ gilt und das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{3} e^x \, dx = \lim_{r \to -\infty} \int_{r}^{3} e^x \, dx = \lim_{r \to -\infty} [\, e^x \,]_r^3 = \lim_{r \to -\infty} (e^3 - e^r) = e^3$$

konvergiert, ist $\int_{-\infty}^{3} \frac{e^{2x}}{1+e^x} \, dx$ nach dem Majorantenkriterium konvergent.