UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. Simon Blatt

WS 2012/13
22.10.2012

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

2. Übungsblatt

Aufgabe 7

Es seien X, Y und Z Mengen sowie $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Funktionen. Weiter sei $h := g \circ f$ die Komposition von f und g. Begründen Sie die folgenden Aussagen:

a) **i)** Ist h injektiv, dann ist f injektiv.
ii) Ist h surjektiv, dann ist g surjektiv.

b) **i)** Sind f und g bijektiv, so ist auch h bijektiv.
ii) Ist h surjektiv und g injektiv, so ist f surjektiv.

Aufgabe 8

a) Wir betrachten eine Abbildung $f : X \to Y$. Begründen Sie folgende Aussagen:

(i) Die Funktion f ist genau dann injektiv ist, wenn es eine Abbildung $g : Y \to X$ gibt, so dass $g \circ f = id_X$. (Die Funktion g nennt man Linksinverse zur Funktion f)

(ii) Die Funktion f ist genau dann surjektiv ist, wenn es eine Abbildung $g : Y \to X$ gibt, so dass $f \circ g = id_Y$. (In diesen Fall heißt g Rechtsinverse zu f.)

b) Eine Abbildung $f : \{0, 1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ genau dann injektiv ist, wenn sie surjektiv ist.

Aufgabe 9

a) Für $k \in \{1, 2, 3\}$ seien die Funktionen $f_k\colon \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ definiert durch

$$f_1(x) := x\,, \qquad f_2(x) := 1 + \frac{x}{1-x}\,, \qquad f_3(x) := 1 - \frac{1}{x}\,.$$

Überprüfen Sie jede dieser Funktionen auf Bijektivität und bestimmen Sie gegebenenfalls die Umkehrfunktion.

b) Berechnen Sie $f_j \circ f_k$ für alle $j, k \in \{1, 2, 3\}$.

Aufgabe 10

Man nennt eine Menge A höchstens abzählbar, wenn es eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to A$ gibt. Man nennt sie abzählbar, wenn es sogar eine Bijektion zwischen A und den natürlichen Zahlen gibt. Sind folgende Mengen abzählbar oder höchstens abzählbar?

a) {0,1,2,3}

b) Eine beliebige Teilmenge von $\mathbb{N}$.

c) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

d) $\mathbb{Q}$

Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie gegebenenfalls die entsprechende Abbildung an! Überlegen Sie sich, wie Sie einem Passanten in der Fußgängerzone klar machen würden, was „ eine Menge ist abzählbar“ und „ eine Menge ist höchstens abzählbar“ bedeutet.

Aufgabe 11

a) Beweisen Sie das sogenannte Dirichlet'sche Schubfachprinzip: Zu jeder Abbildung $f : \{0, 1, \dots, n\} \to \{0, 1, \dots, m\}$ mit $n > m$ gibt es zwei verschiedene Zahlen $n_1, n_2 \in \{0, 1, \dots n\}$ mit $f(n_1) = f(n_2)$.

b) Machen Sie sich die Bedeutung der obigen Aussage klar, indem Sie daraus schließen, dass von 13 Menschen mindestens 2 im selben Monat Geburtstag haben. Wie groß muss die Menschengruppe sein, damit sicher zwei am selben Tag Geburtstag haben? (oder ganz allgemein: damit n am selben Tag bzw. im selben Monat Geburtstag haben?)