UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. Simon Blatt

WS 2012/13
29.10.2012

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

3. Übungsblatt

Aufgabe 12

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit

a) $|x-4| = |x+1|$;

b) $|2x| > |5-2x|$;

c) $\big|2-|2-x|\big| \leqslant 1$;

d) $|x+1| + |x-1| > 2$;

e) $\dfrac{3x}{1+|x|} < 4x^2$;

f) $2x + \dfrac{1}{1-x} \geqslant 1$.

Aufgabe 13

Beweisen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $\dfrac{|x+y|}{1+|x+y|} \leqslant \dfrac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} \leqslant \dfrac{|x|}{1+|x|} + \dfrac{|y|}{1+|y|}$;

Tipp: Verwenden Sie $\frac{a}{1+a} = \frac{a+1-1}{1+a} = 1 - \frac{1}{1+a}$ für $a \neq -1$.

b) $\max\{x,y\} = \dfrac{x+y+|x-y|}{2}$ und $\min\{x,y\} = \dfrac{x+y-|x-y|}{2}$.

Aufgabe 14

a) Es seien $x, y \in \mathbb{R}$ sowie $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie:

i) $2xy \leqslant \varepsilon^2 x^2 + \dfrac{1}{\varepsilon^2} y^2$;

ii) $(x+y)^2 \leqslant (1+\varepsilon^2)x^2 + \Big(1+\dfrac{1}{\varepsilon^2}\Big)y^2$.

b) Nun seien $x, y \in (0, \infty)$. Beweisen Sie:

i) $\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y} \leqslant \dfrac{x}{\sqrt{y}} + \dfrac{y}{\sqrt{x}}$;

ii) $\big|\sqrt{x} - \sqrt{y}\big| \leqslant \sqrt{|x-y|}$.

c) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, die $x \leqslant 4 + \sqrt{x-2}$ erfüllen.

Aufgabe 15

a) Überzeugen Sie sich davon, dass für vier positive Zahlen a, b, c, d aus $\frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d}$ folgt, dass $\frac{a}{b} \leqslant \frac{a+c}{b+d} \leqslant \frac{c}{d}$.

b) Das harmonische Mittel $H(a,b)$ zweier positiver Zahlen a, b ist definiert durch $H(a,b) := \frac{2ab}{a+b}$. Begründen Sie, warum

$$H(a,b) \leqslant \sqrt{ab}$$

für alle $a, b > 0$. Warum gilt hier Gleichheit genau dann, wenn $a = b$?

Aufgabe 16

Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(m,n) \mapsto 2^{m-1}(2n-1)$ bijektiv ist.

Hinweis: Sie können verwenden, dass es zu jeder natürlichen Zahl γ Zahlen $a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $b \in \mathbb{N}$, wobei b ungerade ist, gibt mit $\gamma = 2^a b$.