UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. Simon Blatt

WS 2012/13
05.11.2012

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

4. Übungsblatt

Aufgabe 17 (Beweis von Satz 5)

Es seien $M, N \subset \mathbb{R}$ Mengen, die ein Maximum und ein Minimum besitzen. Begründen Sie folgende Aussagen:

a) $M \subset N \Rightarrow \max(M) \leqslant \max(N)$ und $\min(N) \leqslant \min(M)$.

b) $\max(M \cup N) = \max\{\max(M), \max(N)\}$ und $\min(M \cup N) = \min\{\min(M), \min(N)\}$.

c) $\min(M) = -\max(-M)$ mit $-M := \{x \mid -x \in M\}$.

Aufgabe 18

Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen Supremum, Infimum, Maximum bzw. Minimum besitzen. Bestimmen Sie gegebenenfalls diese Werte.

a) $\{x^2 - x + 2 \mid x \in \mathbb{R}\}$

b) $\{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

c) $\left\{x + \dfrac{1}{x} \mid 0 < x \leqslant 42\right\}$

d) $\left\{\dfrac{x^2}{1+x^2} \mid x \in \mathbb{R}\right\}$

e) $f([0,1])$, wobei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

Aufgabe 19 (Existenz k-ter Wurzeln)

Überzeugen Sie sich davon, dass es zu jeder reellen Zahl $y \geqslant 0$ und jedem $k \in \mathbb{N}$ genau eine reelle Zahl $x \geqslant 0$ gibt mit

$$x^k = y.$$

Aufgabe 20

Zeigen Sie, dass die irrationalen Zahlen, also $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, dicht in $\mathbb{R}$ liegen.

Aufgabe 21

Sei $n \in \mathbb{N}$.

a) Begründen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots xy^{n-2} + y^{n-1}).$$

b) Schreiben Sie folgende Ausdrücke mit dem Summenzeichen:

(i) $3 + 7 + 11 + \cdots + (4n-1)$.

(ii) $1 + 5 + 9 + \cdots + (4n+1)$.

(iii) $-1 + 2 - 3 + 4 - \cdots - (2n-1) + 2n$.

(iv) $1 - 3 + 5 - 7 + \cdots + (4n-3) - (4n-1)$.

Finden und beweisen Sie eine Formel für diese Ausdrücke.