Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. Simon Blatt WS 2012/13

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 5. Übungsblatt

Aufgabe 22

a) Hier liegt eine Teleskopsumme vor. Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = \sum_{k=1}^{n} (k+1-1) \cdot k! = \sum_{k=1}^{n} \big((k+1)! - k!\big) = \sum_{k=1}^{n} (k+1)! - \sum_{k=1}^{n} k!$$
$$= (n+1)! + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)! - (1 + \sum_{k=2}^{n} k!) = (n+1)! - 1.$$

b) Beweis durch vollständige Induktion:

IA: Wegen $\sum_{k=1}^{2} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ und $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{1+k} = \frac{1}{2}$ ist $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ für $n = 1$ richtig.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$. Für dieses n gelte $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ (IV). Dann folgt

$$\sum_{k=1}^{2(n+1)} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \overset{\text{IV}}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{n+(n+1)} - \frac{1}{2n+2}$$
$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k} - \frac{1}{2n+2} \overset{j:=k-1}{=} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{n+(1+j)} - \frac{1}{2n+2}$$
$$= \frac{1}{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(n+1)+j} - \frac{1}{2n+2} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(n+1)+j} + \frac{2-1}{2n+2} = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{(n+1)+j}.$$

c) Wir verwenden wieder vollständige Induktion.

IA: Für $n = 1$ hat die Summe genau einen Summanden und ergibt 1; dies ist größer als $\frac{1}{2}$.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$. Für dieses n sei $\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} > \frac{n}{2}$ erfüllt (IV). Dann folgt

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} \overset{\text{IV}}{>} \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{n}{2} + \frac{2^{n+1} - 1 - 2^n + 1}{2^{n+1}} = \frac{n+1}{2}.$$

(Bei der Abschätzung wurde außer IV noch benutzt, dass $2^{n+1} > k$, also $1/k > 1/2^{n+1}$, für alle $k \in \{2^n, \dots, 2^{n+1} - 1\}$ gilt.)

d) IA: Für $n = 1$ stimmt die behauptete Aussage, denn $6^1 - 5 \cdot 1 + 4 = 5$ ist durch 5 teilbar.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte die Behauptung, sei also $6^n - 5n + 4$ durch 5 teilbar, etwa $6^n - 5n + 4 = 5l$ für ein $l \in \mathbb{Z}$. (IV)

Zu zeigen ist, dass dann auch $6^{n+1} - 5(n+1) + 4$ durch 5 teilbar ist. Es gilt:

$$6^{n+1} - 5(n+1) + 4 = 6 \cdot 6^n - 5n - 5 + 4 = 6\big(6^n - 5n + 4\big) + 25n - 25$$
$$\overset{\text{IV}}{=} 6 \cdot 5l + 25n - 25 = \big(\underbrace{6 \cdot l + 5n - 5}_{\in \mathbb{Z}}\big) \cdot 5.$$

— bitte wenden —

e) IA: Für $n = 5$ gilt $2^n = 2^5 = 32$ und $n^2 = 5^2 = 25$. Also ist die behauptete Ungleichung für $n = 5$ wahr.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 5$ beliebig. Für dieses n gelte $2^n > n^2$ (IV). Dann folgt

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \overset{\text{IV}}{>} 2 \cdot n^2 .$$

Zu zeigen verbleibt: $2n^2 \geqslant (n+1)^2 \;\Leftrightarrow\; 2n^2 \geqslant n^2 + 2n + 1 \;\Leftrightarrow\; n^2 \geqslant 2n + 1$. Die Gültigkeit der letzten Ungleichung sehen wir folgendermaßen

$$n \geqslant 5 \;\Rightarrow\; n \geqslant 3 \;\Rightarrow\; n^2 \geqslant 3n \;\Rightarrow\; n^2 \geqslant 2n + n \;\Rightarrow\; n^2 \geqslant 2n + 1\,.$$

f) IA: Für $n = 2$ ist $\prod_{k=1}^{2-1}(1 + \frac{1}{k})^k = (1 + \frac{1}{1})^1 = 2 = \frac{2^2}{2!}$.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$ beliebig. Für dieses n gelte $\prod_{k=1}^{n-1}(1 + \frac{1}{k})^k = \frac{n^n}{n!}$ (IV). Dann gilt:

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{(n+1)-1}\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k &= \left(\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \overset{\text{IV}}{=} \frac{n^n}{n!} \cdot \left(\frac{n}{n} + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \frac{n^n}{n!} \cdot \frac{(n+1)^n}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n!} \cdot \frac{n+1}{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

Aufgabe 23

a) Wir beginnen damit, einige a_n zu berechnen:

$$a_3 = \frac{(3-1)^2(3-2)^2}{3^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{9}, \qquad a_4 = \frac{3^2 2^2}{4^2} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

Es scheint $a_n = 1/n^2$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ zu gelten. Wir bestätigen dies mit vollständiger Induktion:

Induktionsanfang: Für $n = 1$ und $n = 2$ stimmt dies offenbar.

Induktionsschluss: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$. Für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ gelte $a_k = 1/k^2$ (IV).

(Man beachte: Als Induktionsvoraussetzung reicht hier nicht, dass die Formel nur für n gilt, sondern auch für $n - 1$, weil man im Induktionsschluss auf Informationen über a_n und a_{n-1} zurückgreift.)

Dann folgt

$$a_{n+1} = \frac{n^2(n-1)^2}{(n+1)^2} \cdot a_n \cdot a_{n-1} = \frac{n^2(n-1)^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{(n-1)^2} = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

b) Induktionsanfang: Es gilt $a_2 = \sum_{m=1}^{1} m a_m = 1 = \frac{1}{2}2! = \frac{1}{2}n!$. Induktionsschluss: Wir nehmen an, dass $a_m = \frac{1}{2}m!$ für alle $m = 2, \ldots, n$. Dann gilt

$$a_{n+1} = \sum_{m=1}^{n} \binom{m}{a\ m} = n a_n + \sum_{m=1}^{n-1} m a_m = n a_n + a_n = (n+1)a_n \overset{\text{I.V.}}{=} (n+1)\frac{n!}{2} = \frac{(n+1)!}{2}.$$

Aufgabe 24

a) Indem wir

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

in die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^3 - k^3\right) = (n+1)^3 - 1$$

einsetzen, erhalten wir

$$(n+1)^3 - 1 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n$$

Lösen wir dies nach $\sum_{k=1}^n k^2$ auf und verwenden wir den kleinen Gauß, so bekommen wir

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^2 &= -\sum_{k=1}^{n} k + \frac{1}{3}\big((n+1)^3 - (n+1)\big) = \frac{1}{6}(n+1)\big(2(n+1)^2 - 3n - 2\big)\\ &= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + 4n + 2 - 3n - 2)\\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).\end{aligned}$$

b) Um

$$\sum_{k=1}^{n} k^3$$

zu berechnen, setzen wir wie eben

$$(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$$

in

$$\sum_{k=1}^{n}\big((k+1)^4 - k^4\big) = (n+1)^4 - 1$$

ein und erhalten

$$4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + n = (n+1)^4 - 1.$$

Also gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \frac{1}{4}\big((n+1)^4 - 1 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - n\big)\\ &= \frac{1}{4}(n+1)\big((n+1)^3 - (n+1)(2n+1)\big) = \frac{1}{4}(n+1)^2(n^2 + 2n + 1 - 2n - 1)\\ &= \frac{1}{4}\left(n(n+1)\right)^2.\end{aligned}$$

Auf dieselbe Weise erhält man

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1).$$

Aufgabe 25

a) Es gilt: $z^3 = (3-i)^3 = (3-i)(9-6i+i^2) = (3-i)(8-6i) = 24 - 18i - 8i + 6i^2 = 18 - 26i$. Folglich hat z^3 den Realteil 18 und den Imaginärteil -26. Ferner ist $|z^3| = \sqrt{18^2 + (-26)^2} = \sqrt{1000} = 10\sqrt{10}$. Alternativ kann man $|z^3|$ auch berechnen, ohne z^3 bestimmt zu haben: $|z^3| = |z|^3 = \sqrt{3^2 + (-1)^2}^3 = \sqrt{10}^3 = 10\sqrt{10}$.

b) Wir erweitern den Bruch geeignet (Standardtrick: $z\bar{z}$ ist reell, daher ergibt $1/z = 1/z \cdot \bar{z}/\bar{z} = \bar{z}/(z\bar{z})$ einen reellen Nenner):

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{3-i} = \frac{1}{3-i}\cdot\frac{3+i}{3+i} = \frac{3+i}{3^2 - i^2} = \frac{3+i}{10} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}i.$$

Also hat $1/z$ den Realteil $\frac{3}{10}$ und den Imaginärteil $\frac{1}{10}$. Der Betrag von $1/z$ ist $|1/z| = \sqrt{\frac{9}{100} + \frac{1}{100}} = \sqrt{1/10} = \sqrt{10}/10$, alternativ: $|1/z| = 1/|z| = 1/\sqrt{10} = \sqrt{10}/10$.

c) Es ergibt sich $z \cdot w = (3-i)(-1+2i) = -3+6i+i-2i^2 = -1+7i$. Also hat $z \cdot w$ Realteil -1 und Imaginärteil 7. Außerdem gilt $|z \cdot w| = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} = |z| \cdot |w|$.

d) Es ist $\overline{z}^2 = \left(\overline{3-i}\right)^2 = (3+i)^2 = 9+6i+i^2 = 8+6i$ und wegen $w^2 = (-1+2i)^2 = 1-4i+4i^2 = -3-4i$ ergibt sich

$$\frac{1}{w^2} = \frac{1}{-3-4i} \cdot \frac{-3+4i}{-3+4i} = \frac{-3+4i}{9-16i^2} = \frac{-3+4i}{25} = -\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i.$$

$\overline{z}^2+1/w^2 = (8+6i)+(-\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i)$ hat somit Realteil $8-\frac{3}{25} = \frac{197}{25}$ und Imaginärteil $6+\frac{4}{25} = \frac{154}{25}$. Der Betrag von $\overline{z}^2 + 1/w^2$ lautet $|\overline{z}^2 + 1/w^2| = \sqrt{197^2 + 154^2}/25 = \sqrt{2501}/5$.