Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. Simon Blatt

WS 2012/13

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge für das 6. Übungsblatt

Aufgabe 26

a) Hier handelt es sich um die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, die vom Punkt $-1-i$ den gleichen Abstand haben wie vom Punkt $3+3i$. Das ist die Mittelsenkrechte der Verbindungsstrecke dieser beiden Punkte, also die Gerade $\operatorname{Im} z = -\operatorname{Re} z + 2$.

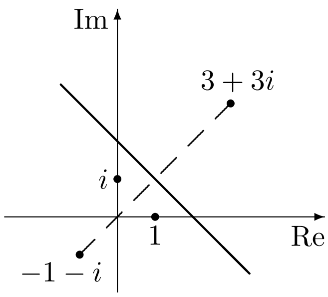
b) Dies ist der Schnitt zwischen dem Äußeren des Kreises um i mit Radius 1 (einschließlich der Kreislinie) und dem Inneren des Kreises um $1+2i$ mit Radius 3 (ohne Rand). Die Menge ist in der Skizze schraffiert.

c) Die komplexe Zahl $z = x+iy$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$) liegt genau dann in dieser Menge, wenn

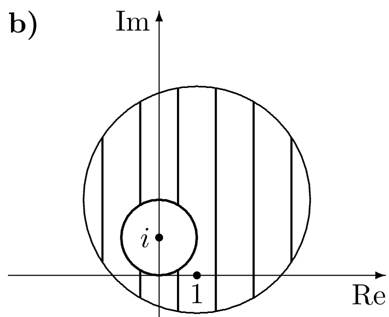
$$1 \geqslant \operatorname{Re}(z^2) = \operatorname{Re}\big((x+iy)^2\big) = \operatorname{Re}(x^2+2ixy-y^2) = x^2-y^2$$

gilt, d. h. für $x^2 \leqslant 1+y^2$, also $|x| \leqslant \sqrt{1+y^2}$ bzw. $-\sqrt{1+y^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{1+y^2}$. Die Menge ist in der Skizze schraffiert; man beachte, dass es sich um eine unbeschränkte Menge handelt.

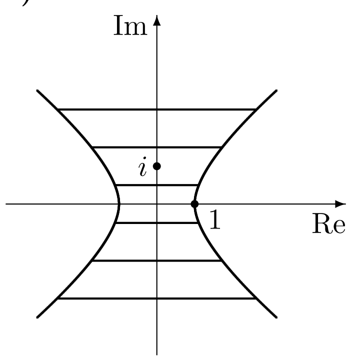
a)



b)



c)



Aufgabe 27

a) Es gilt $z^2 - 2z + 3 = (z-1)^2 + 2$. Die Gleichung $z^2 - 2z + 3 = 0$ ist also genau dann erfüllt, wenn $(z-1)^2 = -2$. Dies bedeutet $z - 1 = i\sqrt{2}$ oder $z - 1 = -i\sqrt{2}$, also hat die Gleichung die zwei Lösungen $z_1 = 1 + i\sqrt{2}$ und $z_2 = 1 - i\sqrt{2}$.

b) Mit dem Ansatz $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ erhalten wir

$$\begin{aligned} z^2 = |z|^2 \quad &\Leftrightarrow \quad a^2 + 2aib + (ib)^2 = a^2 + b^2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + 2aib - b^2 = a^2 + b^2 \\ &\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \quad a^2 - b^2 = a^2 + b^2 \text{ und } 2ab = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -2b^2 = 0 \text{ und } \big(a = 0 \text{ oder } b = 0\big) \\ &\Leftrightarrow \quad b = 0 \text{ und } \big(a = 0 \text{ oder } b = 0\big) \\ &\Leftrightarrow \quad b = 0. \end{aligned}$$

[In $(*)$ verwenden wir, dass zwei komplexe Zahlen genau dann gleich sind, wenn sie den selben Real- und Imaginärteil besitzen.]
Also ist $z^2 = |z|^2$ genau dann erfüllt, wenn $\operatorname{Im}(z) = 0$ bzw. $z \in \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 28

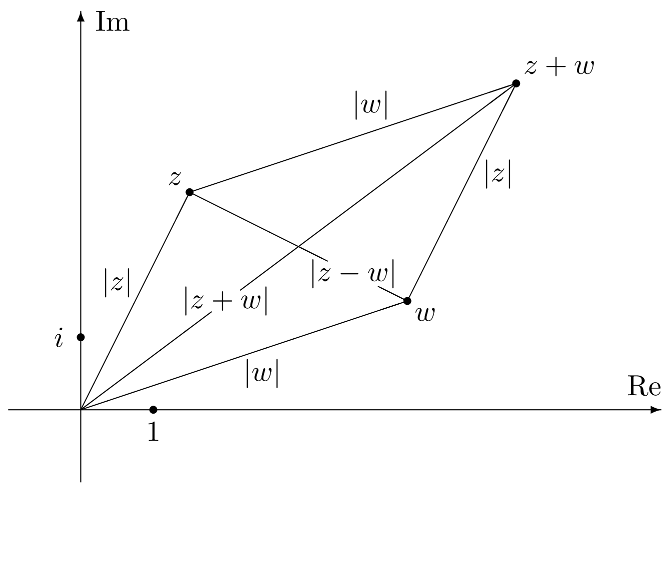
Mit Hilfe von $\operatorname{Re}(\lambda) = \frac{1}{2}(\lambda + \overline{\lambda})$ (für $\lambda \in \mathbb{C}$) erhalten wir

$$|z+w|^2 = (z+w)\overline{(z+w)} = (z+w)(\overline{z} + \overline{w}) = z\overline{z} + z\overline{w} + \underbrace{w\overline{z}}_{=\overline{\overline{w}z} = \overline{z\overline{w}}} + w\overline{w} = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 .$$

Daraus ergibt sich sofort

$$|z-w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}\big(z(\overline{-w})\big) + |-w|^2 = |z|^2 - 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 .$$

Addiert man diese Gleichungen, so folgt $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$.
Geometrische Bedeutung: In einem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate der Diagonalenlängen gleich der Summe der Quadrate der Seitenlängen.



Aufgabe 29

a) Wir verwenden die geometrische Summenformel

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}.$$

In der Übung wurde diese für reelle $q \neq 1$ gezeigt. Diesen Beweis kann man wortwörtlich auch für $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ führen. Danach gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{22}(1-i)^k &= -1 + \sum_{k=0}^{22}(1-i)^k = -1 + \frac{1-(1-i)^{23}}{1-(1-i)} = -1 + \frac{1-(1-i)^{23}}{i} \cdot \frac{-i}{-i} \\ &= -1 - i\big(1-(1-i)^{23}\big).\end{aligned}$$

Wegen

$$(1-i)^{22} = \big((1-i)^2\big)^{11} = (1-2i+i^2)^{11} = (-2i)^{11} = (-1)^{11}2^{11}i^{11} = -2^{11}i^3i^8 = 2^{11}i$$

ist

$$(1-i)^{23} = 2^{11}i(1-i) = 2^{11}(i+1).$$

Damit erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{22}(1-i)^k = -1 - i\big(1-2^{11}(1+i)\big) = -1 - 2^{11} + i(2^{11}-1) = -2049 + 2047\,i.$$

b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ folgt mit der geometrischen Summenformel

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{i}{2}\Big)^k &\overset{l:=k-1}{=} \sum_{l=0}^{n-1}\Big(\frac{i}{2}\Big)^{l+1} = \frac{i}{2}\sum_{l=0}^{n-1}\Big(\frac{i}{2}\Big)^l = \frac{i}{2} \cdot \frac{1-(i/2)^n}{1-i/2} \cdot \frac{1+i/2}{1+i/2} \\ &= \frac{i}{2} \cdot \frac{1-(i/2)^n + i/2 - (i/2)^{n+1}}{1-i^2/4} = \frac{i}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \Big(1-(i/2)^n + i/2 - (i/2)^{n+1}\Big) \\ &= \frac{2}{5}\,i\,\Big(1+i/2\Big) + \frac{2}{5}\,i\,\Big(-(i/2)^n - (i/2)^{n+1}\Big) = \frac{2}{5}\,i - \frac{1}{5} + \frac{2}{5}\,i\,\Big(-1-i/2\Big)(i/2)^n \\ &= \frac{2}{5}\,i - \frac{1}{5} + \Big(-\frac{2}{5}\,i + \frac{1}{5}\Big)\frac{i^n}{2^n}.\end{aligned}$$

Nun seien $m \in \mathbb{N}_0$ und $r \in \{0,1,2,3\}$ mit $n = 4m + r$. Dann gilt

$$i^n = i^{4m+r} = i^{4m} \cdot i^r = (i^4)^m \cdot i^r = 1^m \cdot i^r = i^r$$

und damit

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{i}{2}\Big)^k = \frac{2}{5}\,i - \frac{1}{5} + \Big(-\frac{2}{5}\,i + \frac{1}{5}\Big)\frac{i^r}{2^n}.$$

Für $r = 0$ (also, falls n durch 4 teilbar ist) gilt

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{i}{2}\Big)^k = \frac{2}{5}\,i - \frac{1}{5} + \Big(-\frac{2}{5}\,i + \frac{1}{5}\Big)\frac{1}{2^n} = -\frac{1}{5} + \frac{1}{5 \cdot 2^n} + i\,\Big(\frac{2}{5} - \frac{1}{5 \cdot 2^{n-1}}\Big).$$

Für $r = 1$ (also, falls n durch 4 mit Rest 1 teilbar ist) gilt

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{i}{2}\Big)^k = \frac{2}{5}\,i - \frac{1}{5} + \Big(-\frac{2}{5}\,i + \frac{1}{5}\Big)\frac{i}{2^n} = -\frac{1}{5} + \frac{1}{5 \cdot 2^{n-1}} + i\,\Big(\frac{2}{5} + \frac{1}{5 \cdot 2^n}\Big).$$

Für $r = 2$ (also, falls n durch 4 mit Rest 2 teilbar ist) gilt

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{i}{2}\Big)^k = \frac{2}{5}\,i - \frac{1}{5} + \Big(-\frac{2}{5}\,i + \frac{1}{5}\Big)\frac{-1}{2^n} = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5 \cdot 2^n} + i\,\Big(\frac{2}{5} + \frac{1}{5 \cdot 2^{n-1}}\Big).$$

Für $r=3$ (also, falls n durch 4 mit Rest 3 teilbar ist) gilt

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{i}{2}\Big)^k = \frac{2}{5}\,i-\frac{1}{5}+\Big(-\frac{2}{5}\,i+\frac{1}{5}\Big)\frac{-i}{2^n} = -\frac{1}{5}-\frac{1}{5\cdot 2^{n-1}}+i\,\Big(\frac{2}{5}-\frac{1}{5\cdot 2^n}\Big).$$

Wir lesen ab:

$$\operatorname{Re}\Big(\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{i}{2}\Big)^k\Big) = \begin{cases} -\frac{1}{5}+\frac{1}{5\cdot 2^n}\ , & \text{falls } n \text{ durch 4 teilbar ist}\\ -\frac{1}{5}+\frac{1}{5\cdot 2^{n-1}}, & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 1 teilbar ist}\\ -\frac{1}{5}-\frac{1}{5\cdot 2^n}\ , & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 2 teilbar ist}\\ -\frac{1}{5}-\frac{1}{5\cdot 2^{n-1}}, & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 3 teilbar ist}\end{cases}$$

$$\operatorname{Im}\Big(\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{i}{2}\Big)^k\Big) = \begin{cases} \frac{2}{5}-\frac{1}{5\cdot 2^{n-1}}, & \text{falls } n \text{ durch 4 teilbar ist}\\ \frac{2}{5}+\frac{1}{5\cdot 2^n}\ , & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 1 teilbar ist}\\ \frac{2}{5}+\frac{1}{5\cdot 2^{n-1}}, & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 2 teilbar ist}\\ \frac{2}{5}-\frac{1}{5\cdot 2^n}\ , & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 3 teilbar ist}\end{cases}$$

Aufgabe 30

a) Wegen $a_n=\frac{2n}{n+1}=\frac{2}{1+\frac{1}{n}}$ vermuten wir, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n\to\infty$ gegen 2 konvergiert.

Für jedes $n\in\mathbb{N}$ ist

$$|a_n-2| = \left|\frac{2n-2(n+1)}{n+1}\right| = \frac{2}{n+1}.$$

Daher ergibt sich

$$|a_n-2|<\varepsilon \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{2}{n+1}<\varepsilon \quad\Longleftrightarrow\quad n>\frac{2}{\varepsilon}-1.$$

Sei $\varepsilon>0$ beliebig. Wähle $n_0\in\mathbb{N}$ mit $n_0>\frac{2}{\varepsilon}-1$. (Ein solches n_0 existiert, weil die Menge der natürlichen Zahlen nicht nach oben beschränkt ist.) Wie eben gesehen, gilt dann $|a_n-2|<\varepsilon$ für alle $n\in\mathbb{N}$ mit $n\geqslant n_0$. Also konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 2.

Ist $\varepsilon:=10^{-10}$, so kann man beispielsweise $n_0:=2\cdot 10^{10}>2\cdot 10^{10}-1=\frac{2}{\varepsilon}-1$ nehmen. Damit gilt $|a_n-2|<10^{-10}$ für alle $n\in\mathbb{N}$ mit $n\geqslant 2\cdot 10^{10}$.

b) **i)** Wir werden eine monoton wachsende Folge basteln, indem wir mit 1 beginnen und dann die Abstände zwischen benachbarten Flogengliedern erst zweimal gleich 1/2, dann dreimal gleich 1/2, viermal gleich 1/4 und so weiter wählen. Also

$$\begin{aligned}&a_1=1,\\&a_2=3/2, a_3=2,\\&a_4=7/3, a_5=8/3, a_6=3,\\&a_5=13/4, a_6=14/4, a_7=15/4, a_8=4\\&\dots\end{aligned}$$

Dadurch gewinnen wir eine unbeschränkte Folge mit $\lim_{n\to\infty}|a_{n+1}-a_n|=0$. Versucht man das mittels einer Formel auszudrücken, so erhält man mit Hilfe des kleinen Gauß

$$\begin{aligned}a_n :=& k+\frac{1}{k+1}\left(n-\frac{1}{2}k(k+1)\right), \qquad \text{falls}\\ &n\in\left\{\frac{1}{2}k(k+1)+1,\dots,\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1)=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\right\}\end{aligned}$$

Diese ist unbeschränkt, konvergiert also insbesondere nicht, aber $\lim_{n\to\infty}|a_{n+1}-a_n|=0$. Die harmonische Reihe wäre ein weiteres Gegenbeispiel.

ii) Definitionsgemäß konvergiert eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert $a \in \mathbb{C}$, falls es zu jedem $\widetilde{\varepsilon} > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so gibt, dass $|a_n - a| < \widetilde{\varepsilon}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant n_0$ gilt.

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genüge der Voraussetzung ii). Wir behaupten, dass dann $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert. Denn:

Sei $\widetilde{\varepsilon} > 0$. Setze $\varepsilon := \sqrt{\widetilde{\varepsilon}/2} > 0$. Nach Voraussetzung ii) existiert zu diesem ε ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant n_0$ stets $|a_n - 0| = |a_n| < 2\varepsilon^2 = \widetilde{\varepsilon}$ ist. Gemäß Definition bedeutet dies, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und zwar gegen 0.

iii) Sei etwa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wegen $|a_n + a_{n+1}| = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Bedingung iii) erfüllt. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert jedoch.