Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. Simon Blatt

WS 2012/13
03.12.2012

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
Elektrotechnik und Informationstechnik

8. Übungsblatt

Aufgabe 36

Man nennt eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ existiert, so dass

$$|a_n - a_m| \leqslant \varepsilon \text{ für alle natürlichen Zahlen } n, m \geqslant N(\varepsilon).$$

a) Zeigen Sie, dass jede konvergente Folge eine Cachyfolge ist.

b) Zeigen Sie, dass jede Cauchyfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. (Hinweis: Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Warum konvergiert Sie gegen den nach dem Satz von Bolzano Weierstrass existierenden Häufungspunkt H?)

Aufgabe 37

Gegeben seien $q \in [0, 1)$ und eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{C}$.

a) Es gelte

$$|a_{n+1} - a_n| \leqslant q \cdot |a_n - a_{n-1}| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{$*$}$$

Zeigen Sie, dass dann $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent ist.

Hinweis: Rechnen Sie nach, dass $|a_{n+1} - a_n| \leqslant q^n \cdot |a_1 - a_0|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, und folgern Sie damit, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchy-Folge ist.

b) Nun erfülle die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ statt $(*)$ die Bedingung

$$|a_{n+1} - a_n| < |a_n - a_{n-1}| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Untersuchen Sie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf Konvergenz.

Aufgabe 38

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n!}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{1+n^2} - n\right)$

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n + (-1)^n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\frac{1}{n}}$

Hinweis: Argumentieren Sie mit dem Leibniz-, Majoranten- oder Minorantenkriterium.

Aufgabe 39

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei gegeben durch

$$a_{2n-1} := \frac{1}{n} \qquad a_{2n} = -\frac{1}{n^2}\,.$$

für $n \in \mathbb{N}$.

a) Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \cdots$ konvergent oder divergent?

b) Warum ist das Leibnizkriterium hier nicht anwendbar?