Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. Simon Blatt

WS 2012/13

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge für das 8. Übungsblatt

Aufgabe 36

a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge, a ihr Grenzwert und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $N(\varepsilon)$, so dass

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $n \geqslant N(\varepsilon)$. Also gilt

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) - (a_m - a)| \leqslant |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für all $n, m \geqslant N(\varepsilon)$. Damit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge.

b) Sei andererseits $(a_n)_{n\in N}$ ein Cauchyfolge. Um die Beschränktheit der Folge zu zeigen, verwenden wir, dass wir für $\varepsilon = 1$ eine natürliche Zahl $N(1)$ finden, mit

$$|a_n - a_m| \leqslant 1 \qquad \forall n, m \geqslant N(1).$$

Insbesondere gilt für alle $n \geqslant N(1)$

$$|a_n| = |a_n - a_{N(1)} + a_{N(1)}| \leqslant |a_n - a_{N(1)}| + |a_{N(1)}| < 1 + |a_{N(1)}|$$

Also

$$|a_n| \leqslant \max\{|a_1|, \dots, |a_{N(1)}|\} + 1.$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist $(a_n)_{n\in N}$ eine beschränkte Folge. Der Satz Bolzano Weierstrass sagt uns also, dass $(a_n)_{n\in N}$ einen Häufungspunkt a hat. Wir werden nun zeigen, dass die gesamte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen diesen Häufungspunkt konvergiert. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, gibt es eine Zahl $N(\varepsilon)$, so dass

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geqslant N(\varepsilon).$$

Da a ein Häufungspunkt ist, gibt es einen Index $n_0 \geqslant N(\varepsilon)$, so dass $|a - a_{n_0}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Zusammen erhalten wir für alle $n \geqslant N(\varepsilon)$

$$|a_n - a| \leqslant |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Also konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.

Aufgabe 37

a) Gegeben seien $q \in [0, 1)$ und eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{C}$ mit

$$|a_{n+1} - a_n| \leqslant q \cdot |a_n - a_{n-1}| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \qquad (*)$$

Mit Hilfe von vollständiger Induktion rechnen wir zunächst nach

$$|a_{n+1} - a_n| \leqslant q^n \cdot |a_1 - a_0| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \qquad (**)$$

IA ($n=1$): Wegen $(*)$ ist $|a_2-a_1| \leqslant q^1 \cdot |a_1-a_0|$.
IS: Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gelte $|a_{n+1}-a_n| \leqslant q^n \cdot |a_1-a_0|$ (IV). Dann erhält man

$$|a_{n+2}-a_{n+1}| \overset{(*)}{\leqslant} q \cdot |a_{n+1}-a_n| \overset{(IV)}{\leqslant} q \cdot q^n \cdot |a_1-a_0| = q^{n+1} \cdot |a_1-a_0| .$$

Wir zeigen nun

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall k \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geqslant n_0 : \quad |a_{n+k}-a_n| < \varepsilon.$$

Für beliebige $k, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
a_{n+k}-a_n &= a_{n+k} + \left(\sum_{j=0}^{k-2} a_{n+j+1}\right) - \left(\sum_{l=0}^{k-2} a_{n+l+1}\right) - a_n \\
&\overset{j:=l+1}{=} a_{n+k} + \left(\sum_{j=0}^{k-2} a_{n+j+1}\right) - \left(\sum_{j=1}^{k-1} a_{n+j}\right) - a_n \\
&= \left(\sum_{j=0}^{k-1} a_{n+j+1}\right) - \left(\sum_{j=0}^{k-1} a_{n+j}\right) = \sum_{j=0}^{k-1} (a_{n+j+1}-a_{n+j}).
\end{aligned}$$

Mit der Dreiecksungleichung, $(**)$ und der geometrischen Summenformel ergibt sich

$$\begin{aligned}
|a_{n+k}-a_n| &\leqslant \sum_{j=0}^{k-1} |a_{n+j+1}-a_{n+j}| \leqslant \sum_{j=0}^{k-1} q^{n+j} |a_1-a_0| = q^n \sum_{j=0}^{k-1} q^j \, |a_1-a_0| \\
&= q^n \frac{1-q^k}{1-q} \, |a_1-a_0| \leqslant \frac{q^n}{1-q} \, |a_1-a_0|.
\end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $0 \leqslant q < 1$ konvergiert die Folge $(\frac{q^n}{1-q} \, |a_1-a_0|)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0, daher finden wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{q^n}{1-q} \, |a_1-a_0| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant n_0$. Demzufolge ist

$$|a_{n+k}-a_n| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geqslant n_0 \text{ und } k \in \mathbb{N}. \tag{+}$$

Hieraus folgt

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \qquad \text{für alle } m, n \in \mathbb{N} \text{ mit } m, n \geqslant n_0.$$

[Denn: Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geqslant n_0$ beliebig. Ohne Einschränkung sei $m > n$. Dann ist $k := m - n \in \mathbb{N}$ und nach (+) ergibt sich $|a_m - a_n| = |a_{n+k} - a_n| < \varepsilon$.]

Fazit: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$ und daher konvergent.

b) Bekanntlich ist die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent, d.h. die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} := (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k})_{n \in \mathbb{N}}$ ist divergent. Betrachte $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $a_n := s_{n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Dann genügt $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ der Voraussetzung in b), denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|a_{n+1}-a_n| = |s_{n+2}-s_{n+1}| = \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1} = |s_{n+1}-s_n| = |a_n - a_{n-1}|.$$

Allerdings divergiert $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

Aufgabe 38

a) Die Bernoullische Ungleichung liefert $2^n = (1+1)^n \geqslant 1 + n \cdot 1 \geqslant n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d. h. es ist stets $\sqrt[n]{n} \leqslant 2$. Somit ergibt sich für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{\sqrt[n]{n}}{n!} \right| \leqslant \frac{2}{n!} =: b_n .$$

Bekanntlich konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ (mit Reihenwert e), also ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent, und die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n!}$ folgt mit dem Majorantenkriterium. Insbesondere konvergiert die Reihe.

b) Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sqrt{1+n^2} - n = \frac{1+n^2-n^2}{\sqrt{1+n^2}+n} = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}+n} \geqslant \frac{1}{\sqrt{4n^2}+n} = \frac{1}{3n} =: c_n \geqslant 0\,.$$

Da die Reihe über c_n divergiert, gilt dies nach dem Minorantenkriterium auch für die zu untersuchende Reihe. Insbesondere ist die Reihe nicht absolut konvergent.

c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 3$ gilt $|\frac{1}{2} + \frac{1}{n}| \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ und daher $|(\frac{1}{2} + \frac{1}{n})^n| \leqslant (\frac{5}{6})^n$. Die geometrische Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} (\frac{5}{6})^n$ ist also eine konvergente Majorante von $\sum_{n=2}^{\infty} (\frac{1}{2} + \frac{1}{n})^n$. Nach dem Majorantenkriterium ist $\sum_{n=2}^{\infty} (\frac{1}{2}+\frac{1}{n})^n$ absolut konvergent, also insbesondere konvergent.

d) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir $a_n := \frac{(-1)^n}{3n+(-1)^n} = (-1)^n b_n$ mit $b_n := \frac{1}{3n+(-1)^n}$. Die Folge (b_n) konvergiert gegen 0. Ferner ist (b_n) monoton fallend, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} \geqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3(n+1)+(-1)^{n+1}}{3n+(-1)^n} \geqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3 \geqslant (-1)^n - (-1)^{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad 3 \geqslant 2(-1)^n$$

und die letzte Ungleichung ist offenkundig wahr. Nach dem Leibnizkriterium konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$. Wegen

$$|a_n| = \frac{1}{3n+(-1)^n} \geqslant \frac{1}{3n+n} = \frac{1}{4n}$$

und der Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n}$ eine divergente Minorante für $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Deshalb ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht absolut konvergent.

e) Wir wissen, dass $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ gilt. Daher ist die Folge $(\sqrt[n]{n})$ beschränkt, d.h. es gibt eine Konstante C so, dass $\sqrt[n]{n} \leqslant C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Hiermit erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}$

$$n^{-1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{n}} \geqslant \frac{1}{Cn}\,.$$

Da die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent ist, folgt die Divergenz der zu untersuchenden Reihe aus dem Minorantenkriterium. Insbesondere ist die Reihe nicht absolut konvergent.

Aufgabe 39

a) Die Reihe ist divergent und zwar divergiert sie bestimmt gegen $+\infty$. Sei dazu $K > 0$. Wir müssen zeigen, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, mit

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \geqslant K \quad \forall n \geqslant N.$$

Wir werden dafür ausnützen, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ konvergiert, also inbesondere beschränkt ist. Letzteres sieht man auch z.B. durch

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)k} \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)}\right) = 2 - \frac{1}{n+1} \leqslant 2.$$

Außerdem wissen wir, dass die harmonische Reihe bestimmt gegen $+\infty$ divergiert, d.h. es gibt ein n_0 , so dass

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \geqslant K + 2$$

für alle $n \geqslant n_0$. Wir erhalten also, da $a_{2n+1} \geqslant 0$

$$\sum_{k=1}^{2n+1} a_k \geqslant \sum_{k=1}^{2n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} + \sum_{k=1}^{n} a_{2k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \geqslant K + 2 - 2 = K.$$

für alle $n \geqslant n_0$. Also divergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bestimmt gegen $+\infty$.

b) Das Leibnizkriterium ist nicht anwendbar, da $|a_n|$ nicht monoton fallend ist.

— bitte wenden —