Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. Simon Blatt

WS 2012/13
10.12.2012

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

9. Übungsblatt

Aufgabe 40

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 e^{-n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n}\left(1 + (-1)^n\right)$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!\,(3n)!}{n!\,(4n)!}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$

Aufgabe 41

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ erfülle das Quotientenkriterium, d. h. es gebe eine $\theta < 1$ mit $a_{n+1} \leqslant \theta a_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für $l \in \mathbb{N}$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^l a_n$$

absolut konvergiert. Gilt diese Aussage auch, wenn Sie das Quotienten- durch das Wurzelkriterium ersetzen?

Aufgabe 42

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch ist. Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

b) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $a_n - b_n \to 0$ für $n \to \infty$. Falls $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

c) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Aufgabe 43

Es sei

$$a_k := (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

a) Untersuche Sie das Cauchyprodukt von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit sich selbst auf Konvergenz.

b) Warum ist der Satz über die Konvergenz des Cauchyproduktes aus der Vorlesung (Satz 10) hier nicht anwendbar?

— bitte wenden —

Aufgabe 44

Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion erhält man

$$e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}.$$

a) Zerlegen Sie diese Gleichung in Real- und Imaginärteil, um die Additionstheoreme für Cosinus und Sinus herzuleiten.

b) Seien $A, B \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie für $x \in \mathbb{R}$ die Polardarstellung von

$$Ae^{ix} + Be^{i(x-\pi/2)}.$$

c) Bestimmen Sie den Real- und den Imaginärteil der so gewonnenen Gleichung.