

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
Elektrotechnik und Informationstechnik

10. Übungsblatt

Aufgabe 45

- a) Bestimme Sie den Real- und Imaginärteil von

$$\frac{2i - 10}{3i - 2}$$

sowie die Polardarstellung aller komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$, die

$$z^3 = \frac{2i - 10}{3i - 2}$$

erfüllen.

- b) Berechnen Sie alle Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x > 1 \\ a + bx^2 & \text{für } x \in [0, 1] \\ x^3 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

stetig ist

(Im Wesentlichen eine Aufgabe aus der Klausur 2012)

Aufgabe 46

Bestimmen Sie alle Stetigkeitsstellen der folgenden Funktionen:

$$\text{a) } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} & \text{für } x \notin \{1, 3\} \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 1 \\ 0 & \text{für } x = 3 \end{cases}$$

$$\text{b) } f: [-7, 3] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \min\{x^2 + 2x - 15, x^3\} & \text{für } x \in [-7, -5] \cup [-1, 3] \\ x + 5 & \text{für } x \in (-5, -1) \end{cases}$$

Aufgabe 47

Die Funktion $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} & \text{für } 0 < |x| \leq 1, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

- a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.
b) Bestimmen Sie den Wertebereich $f([-1, 1])$ von f .
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in [-1, 1]$ gilt.
c) Zeigen Sie, dass f eine Umkehrfunktion besitzt. Berechnen Sie f^{-1} .
d) Begründen Sie, dass f^{-1} streng monoton wachsend ist.
e) Ist f streng monoton wachsend? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 48

Gegeben sei eine stetige Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(0) = f(1)$. Zeigen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass es ein $x_0 \in [0, 1/2]$ gibt, mit $f(x_0 + \frac{1}{2}) = f(x_0)$.

Aufgabe 49 (Weihnachtsaufgabe)

Wichtel Willy saß heulend im Keller. Um ihn herum lagen die 81 sorgsam verpackten, allesamt gleich aussehenden Geschenke für seine 81 Freunde. Damit es keinen Streit unter ihnen gab, hatte er ihnen allen genau das Gleiche eingepackt. Er war in den Keller hinunter gegangen, um beim Einpacken nicht gestört zu werden, hatte sich sogar noch eingeschlossen und dort mehrere Stunden lang damit zugebracht, die Geschenke in kleine Kartons zu stecken, das Papier herumzuwickeln und die Schleifen liebevoll um die Kartons zu binden. Als er dann wieder nach oben gehen wollte, fand er seinen Schlüssel nicht. Oh, hatte er ihn etwa in einen der Kartons gelegt? Doch in welchen? Würde er jetzt diese alle wieder auspacken müssen? Allein der Gedanke daran trieb Willy die Tränen wieder in die Augen. Erstens würde er weitere Stunden damit zubringen und zweitens würde er die Gaben nie wieder so schön einpacken können wie beim ersten Mal. Es war zum Heulen. Wütend schleuderte er seinen Schuh in die Kellerecke, wo er ein lautes Scheppern verursachte. Ach ja, dort lag ja die alte Balkenwaage mit den beiden großen Waagschalen. Der Wägesatz war zwar nicht da, aber er könnte ja die Geschenke gegeneinander abwiegen. Und er könnte ja sogar gleich mehrere Geschenke in jede Waagschale legen. 50 Stück sollten schon hineinpassen, in jede der Schalen. Vielleicht konnte er ja so das eine etwas schwerere Geschenk, in dem der Schlüssel sein musste, herausfinden. Wie viele Wägungen musste Willy dazu mindestens durchführen, um mit Sicherheit das Geschenk mit dem Schlüssel zu finden?

Wir wünschen Ihnen ein schönes Weihnachtsfest und eine guten Rutsch ins Neue Jahr!