Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. Simon Blatt

WS 2012/13
14.01.2013

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

12. Übungsblatt

Aufgabe 55

a) **i)** Wir suchen Zahlen a_n mit

$$\tanh x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad \text{also} \qquad \sinh x = \cosh x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

Setzen wir die Potenzreihendarstellungen von $\sinh x$ und $\cosh x$ ein, so bedeutet dies

$$x + \tfrac{1}{3!}x^3 + \cdots = \big(1 + \tfrac{1}{2!}x^2 + \cdots\big)\big(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\big) .$$

Wir multiplizieren auf der rechten Seite aus; dann haben wir die Gleichung

$$x + \tfrac{1}{3!}x^3 + \cdots = a_0 + a_1 x + (a_2 + \tfrac{1}{2!}a_0)x^2 + (a_3 + \tfrac{1}{2!}a_1)x^3 + \cdots .$$

Somit liefert der Identitätssatz für Potenzreihen

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 + \tfrac{1}{2!}a_0 = 0, \quad a_3 + \tfrac{1}{2!}a_1 = \tfrac{1}{3!} ,$$

also $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ und $a_3 = -\frac{1}{3}$.

ii) Wir müssen die Gleichung $e^x = (\cos x)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots)$, also

$$1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 + \cdots = \big(1 - \tfrac{1}{2!}x^2 + - \cdots\big)\big(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\big)$$

betrachten. Die rechte Seite ergibt

$$a_0 + a_1 x + (a_2 - \tfrac{1}{2!}a_0)x^2 + (a_3 - \tfrac{1}{2!}a_1)x^3 + \cdots$$

und der Vergleich mit der linken Seite liefert $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 - \frac{1}{2!}a_0 = \frac{1}{2!}$ sowie $a_3 - \frac{1}{2!}a_1 = \frac{1}{3!}$, also $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ und $a_3 = \frac{2}{3}$.

b) Wir suchen Zahlen a_n mit

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \qquad \text{also} \qquad 1 = (x^2 + 2x - 3)\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n .$$

Nun gilt wegen $x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$

$$\begin{aligned}(x^2 + 2x - 3)\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^{n+2} - 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n \\ &= -4a_0 - 4a_1(x+1) + \sum_{n=2}^{\infty}(a_{n-2} - 4a_n)(x+1)^n .\end{aligned}$$

Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen hat diese Potenzreihe den Wert 1 genau dann, wenn die folgenden Gleichungen erfüllt sind:

$$-4a_0 = 1, \qquad -4a_1 = 0, \qquad a_{n-2} - 4a_n = 0 \quad \text{für alle } n \geqslant 2 .$$

Es folgt: $a_0 = -\frac{1}{4}$, $a_1 = 0$ und $a_n = \frac{1}{4}a_{n-2}$ für jedes $n \geqslant 2$. Vollständige Induktion liefert: $a_{2k+1} = 0$ und $a_{2k} = -(\frac{1}{4})^{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Aufgabe 56

Sei $p \in \mathbb{N}$. Definiere $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^p$. Dann ist f auf $[a,b]$ stetig und somit über $[a,b]$ integrierbar. Schreibe $q_n := (b/a)^{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$. Gemäß Satz 3 in 13.1 gilt

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty} a(q_n-1)\sum_{k=1}^n f(aq_n^{k-1})q_n^{k-1} = \lim_{n\to\infty} a(q_n-1)\sum_{k=1}^n (aq_n^{k-1})^p q_n^{k-1} \\
&= \lim_{n\to\infty} a^{p+1}(q_n-1)\sum_{k=1}^n q_n^{(k-1)(p+1)} = a^{p+1}\lim_{n\to\infty}(q_n-1)\sum_{k=1}^n (q_n^{p+1})^{k-1} \\
&= a^{p+1}\lim_{n\to\infty}(q_n-1)\sum_{l=0}^{n-1}(q_n^{p+1})^l \overset{(*)}{=} a^{p+1}\lim_{n\to\infty}(q_n-1)\frac{1-(q_n^{p+1})^n}{1-q_n^{p+1}} \\
&= a^{p+1}\lim_{n\to\infty}\big(1-(q_n^{p+1})^n\big)\frac{q_n-1}{1-q_n^{p+1}} = a^{p+1}\lim_{n\to\infty}\left(1-\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p+1}{n}}\right)^n\right)\frac{q_n-1}{1-q_n^{p+1}} \\
&\overset{(*)}{=} a^{p+1}\lim_{n\to\infty}\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^{p+1}\right)\frac{q_n-1}{(1-q_n)(1+q_n+q_n^2+\ldots+q_n^p)} \\
&= \big(b^{p+1}-a^{p+1}\big)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\underbrace{q_n}_{\to 1}+\underbrace{q_n^2}_{\to 1^2}+\ldots+\underbrace{q_n^p}_{\to 1^p}} = \frac{1}{p+1}\big(b^{p+1}-a^{p+1}\big)\,.
\end{aligned}$$

In $(*)$ verwendeten wir die geometrische Summenformel.

Aufgabe 57

a) Das Additionstheorem $\cos(z+y) = \cos z\,\cos y - \sin z\,\sin y$ $(z, y \in \mathbb{C})$ liefert für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos x\,\cos x - \sin x\,\sin x = \cos^2 x - \sin^2 x\,,$$

woraus wegen $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1\,, \qquad \text{also} \quad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}\big(\cos(2x)+1\big)$$

folgt.

b) Wir wissen aus der Vorlesung, dass

$$\int_a^b e^{cx}dx = \frac{1}{c}\left(e^{cb}-e^{ca}\right)$$

für alle $a < b$ und $c \in \mathbb{C}$. Daraus erhalten wir zusammen mit der Linearität des Integrals

$$\begin{aligned}
\int_a^b \sin(x)dx &= \int_a^b \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}dx = \int_a^b \frac{e^{ix}}{2i}dx - \int_a^b \frac{e^{-ix}}{2i}dx = \frac{e^{ib}-e^{ia}}{2i^2} - \frac{e^{-ib}-e^{-ia}}{-2i^2} \\
&= -\frac{e^{ib}-e^{-ib}}{2} + \frac{e^{ia}-e^{-ia}}{2} = \cos(a)-\cos(b).
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\int_a^b \cos(x)dx &= \int_a^b \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}dx = \frac{e^{ib}-e^{ia}}{2i} + \frac{e^{-ib}-e^{-ia}}{-2i} = -\frac{e^{ib}-e^{-ib}}{2i} - \frac{e^{ia}-e^{-ia}}{2i} \\
&= \sin(b)-\cos(a).
\end{aligned}$$

Auf dieselbe Weise rechnet man nach, dass

$$\int_a^b \sinh(x)dx = \cosh(a)-\cosh(b), \qquad \int_a^b \cosh(x)dx = \sinh(b)-\sinh(a).$$

Mit Hilfe von Teil (i) und der Linearität des Integrals sehen wir schließlich

$$\int_a^b \cos^2(x)dx = \frac{1}{2}\int_a^b (1+\cos(2x))dx = \frac{1}{2}\left((b-a)+\int_a^b \cos(2x)dx\right).$$

Da wir die Substitutionregel noch nicht kennen, müssen wir mit Hilfe der Definition des Integrals zeigen, dass

$$\int_a^b \cos(2x)dx = \frac{1}{2}\int_{2a}^{2b} \cos x dx$$

und damit

$$\int_a^b \cos^2(x)dx = \frac{1}{2}\left((b-a)+\frac{\sin(2b)-\sin(2a)}{2}\right).$$

Da $f(x) := \cos(2x)$ stetig ist, ist die Funktion aus integrierbar. Es gilt aufgrund von Satz 2 aus der Vorlesung

$$\begin{aligned}\int_a^b \cos(2x)dx &= \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(2a+2k\frac{b-a}{n}\right)\\ &= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2b-2a}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(2a+k\frac{2b-2a}{n}\right)\\ &= \frac{1}{2}\int_{2a}^{2b}\cos(x)dx.\end{aligned}$$

Aufgabe 58

a) Sei $f\colon [a,b]\to[0,\infty)$ stetig und es existiere ein $x_0\in[a,b]$ mit $f(x_0)>0$.

Sei $\varepsilon := \frac{1}{2}f(x_0)$. Nach Voraussetzung ist $\varepsilon > 0$ und aufgrund der Stetigkeit von f in x_0 existiert ein $\delta > 0$ mit $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ für alle $x\in[a,b]$ mit $|x-x_0|<\delta$. Für solche x gilt nach der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$f(x) = f(x_0) - (-f(x)+f(x_0)) \geqslant f(x_0) - |f(x)-f(x_0)| \geqslant 2\varepsilon-\varepsilon = \varepsilon\,.$$

Setzt man $\alpha := \max\{a, x_0-\delta\}$ und $\beta := \min\{b, x_0+\delta\}$, so gilt $a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b$ und $f(x)\geqslant\varepsilon$ für alle $x\in[\alpha,\beta]$. Zusammen mit der Abschätzung $f(x)\geqslant 0$ für alle $x\in[a,b]$ folgt

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^b f(x)\,dx\\ &\geqslant \int_a^\alpha 0\,dx + \int_\alpha^\beta \varepsilon\,dx + \int_\beta^b 0\,dx = (\beta-\alpha)\varepsilon > 0\,.\end{aligned}$$

b) Seien $f,g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(x)\geqslant g(x)$ für alle $x\in[a,b]$ und $f(x_0)>g(x_0)$ für ein $x_0\in[a,b]$.

Betrachte die Funktion $h:[a,b]\to\mathbb{R},\ x\mapsto h(x):=f(x)-g(x)$. Dann ist h als Komposition stetiger Funktionen stetig, und es gilt $h(x)\geqslant 0$ für alle $x\in[a,b]$. Außerdem ist $h(x_0) = f(x_0)-g(x_0) > 0$. Somit sind die Voraussetzungen des **a)**-Teils für die Funktion h erfüllt. Dieser liefert

$$\int_a^b h(x)\,dx > 0\,,$$

woraus aufgrund der Linearität des Integrals

$$\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx$$

folgt.

Aufgabe 59

Wir zeigen diese Aufgabe nur für monoton wachsende Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Es sei $Z = \{x_0, x_1, \dots x_n\}$ eine Zerlegung der Intervalls $[a, b]$ der Feinheit $\delta > 0$. Da f monoton steigend ist, gilt

$$
\begin{aligned}
m_k &:= \inf\{f(x) | x \in [x_{k-1}, x_k]\} = f(x_{k-1}) \\
M_k &:= \sup\{f(x) | x \in [x_{k-1}, x_k]\} = f(x_k)
\end{aligned}
$$

und damit

$$
\begin{aligned}
\omega(f, Z) &= \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \\
\Omega(f, Z) &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1})
\end{aligned}
$$

Wir erhalten also

$$
\begin{aligned}
\Omega(f, Z) - \omega(f, Z) &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1}))(x_k - x_{k-1}) \\
&\leqslant \delta \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1}))
\end{aligned}
$$

Letzteres ist eine Teleskopsumme. Daher gilt

$$
\Omega(f, Z) - \omega(f, Z) \leqslant \delta(f(x_n) - f(x_0)) = \delta(f(b) - f(a)).
$$

Falls f konstant ist, so ist f bekanntlich integrierbar. Sei also f nicht konstant. Dann gilt $f(b) - f(a) > 0$. Für beliebiges $\varepsilon > 0$ setzen wir $\delta := \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} > 0$ und erhalten für eine Zerlegung Z der Feinheit δ

$$
\Omega(f, Z) - \omega(f, Z) \leqslant \delta(f(b) - f(a)) = \varepsilon.
$$

Also ist f integrierbar.