Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. Simon Blatt

WS 2012/13
28.01.2013

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

14. Übungsblatt

Aufgabe 60

Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen.

a) $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^{\sqrt[3]{x}}$

b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(2x)\, e^{\sin x}$

c) $f\colon (1,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(\ln x)$

d) $f\colon (0,\pi) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^{\sin x}\, (\sin x)^x$

Aufgabe 61

Es sei $f(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}, |x_0| < r$ fest gewählt.

a) Zeigen Sie, dass für alle $h \in \mathbb{R}$ mit $|x_0 + h| < r$ gilt

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} x_0^k h^{n-(k+1)} \right)$$

b) Schreiben Sie diesen Ausdruck weiter um in

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x_0^{n-1} + h g(h),$$

wobei $g(h)$ die Eigenschaft $\lim_{h\to 0} h g(h) = 0$ hat.

c) Zeigen Sie, dass die Ableitung von f in x_0 existiert und

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n a_n) x^{n-1}$$

gilt.

Aufgabe 62

Untersuchen Sie folgende Ausdrücke auf Konvergenz und berechnen Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert.

a) $\displaystyle\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h} \int_{a-h}^{a+h} \cos(x^2)\, dx \quad (a \in \mathbb{R} \text{ fest})$

b) $\displaystyle\lim_{h\to \infty} \frac{1}{h} \int_{a+h}^{a+2h} \ln x\, dx \quad (a \in \mathbb{R} \text{ fest})$

c) $\displaystyle\lim_{h\to \infty} \int_{1}^{h} \frac{1}{x}\, dx$

d) $\displaystyle\lim_{h\to 0+} \int_{0}^{1} h^x \cos x\, dx$

e) $\displaystyle\lim_{h\to 0+} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (e^{(hx)^2} - 2) \cos^2(x)\, dx$

— bitte wenden —

Aufgabe 63

Es seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen, die an der Stelle $x_0 \in (a, b)$ übereinstimmen. Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen den beiden Tangenten an f und g im Punkt $(x_0, f(x_0))$.

Aufgabe 64

Es sei D eine Teilmenge von $\mathbb{C}$. Für beschränkte Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ definieren wir

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in D\}.$$

Weisen Sie folgende Eigenschaften für beschränkte Funktionen $f, g : D \to \mathbb{C}$ und Konstanten $\lambda \in \mathbb{C}$ nach:

a) $\|f\|_\infty \geqslant 0$ und $(\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0)$.

b) $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$.

c) $\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$.

Übungsklausur Zur Teilnahme an der Übungsklausur am Samstag, den 26.01.2013, von 08:00 bis 10:00 Uhr ist keine Anmeldung erforderlich. Hörsaalverteilung der Übungsklausur:

Anfangsbuchstabe Nachname	Hörsaal
A-K	Benz-Hörsaal
L-Z	Daimler-Hörsaal

Weitere Informationen zur Übungsklausur finden Sie auf der Vorlesungshomepage.

Anmeldeschluss zur Klausur: Freitag, 08.02.2013 (Vorlesungsende WS 12/13)