Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. Simon Blatt

WS 2012/13

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 13. Übungsblatt

Aufgabe 60

a) Nach Definition gilt $f(x) = x^{\sqrt[3]{x}} = e^{\ln(x)\cdot\sqrt[3]{x}}$ für jedes $x > 0$.

Ist $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x)\sqrt[3]{x}$ gesetzt, so ist $f(x) = e^{g(x)} = E(g(x))$. Die Kettenregel liefert

$$f'(x) = E'(g(x))\,g'(x) = E(g(x))\,g'(x) = f(x)\,g'(x)\,, \qquad x \in (0,\infty)\,.$$

Weiter gilt nach der Produktregel

$$g'(x) = \ln'(x)\,\sqrt[3]{x} + \ln(x)\,(x^{1/3})' = \frac{1}{x}\sqrt[3]{x} + \ln(x)\,\frac{1}{3}\,x^{-2/3} = \frac{\sqrt[3]{x}\,(3+\ln(x))}{3x}\,, \qquad x \in (0,\infty)\,,$$

also

$$f'(x) = \frac{\sqrt[3]{x}\,(3+\log(x))}{3x}\,f(x)\,, \qquad x \in (0,\infty)\,.$$

b) Anwendung der Produkt- und Kettenregel liefert für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = -2\sin(2x)\,e^{\sin x} + \cos(2x)\,e^{\sin x}\cos x = \big(\cos(2x)\,\cos x - 2\sin(2x)\big)\,e^{\sin x}\,.$$

c) Mit Hilfe der Kettenregel erhält man für jedes $x \in (1,\infty)$

$$f'(x) = \ln'(\ln x)\,\ln'(x) = \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}\,.$$

d) Für jedes $x \in (0,\pi)$ gilt [Man beachte $\sin x > 0$ für alle $x \in (0,\pi)$.]

$$f(x) = x^{\sin x}\,(\sin x)^x = e^{\ln(x)\cdot\sin x}\cdot e^{\ln(\sin x)\cdot x} = e^{\ln(x)\cdot\sin x + \ln(\sin x)\cdot x} = E(\ln(x)\cdot\sin x + \ln(\sin x)\cdot x)\,.$$

Mehrmalige Anwendung der Ketten- und Produktregel ergibt für jedes $x \in (0,\pi)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= E'(\ln(x)\cdot\sin x + \ln(\sin x)\cdot x)\cdot(\ln(x)\cdot\sin x + \ln(\sin x)\cdot x)' \\ &= E(\ln(x)\cdot\sin x + \ln(\sin x)\cdot x)\cdot\Big(\frac{1}{x}\sin x + \ln(x)\cos(x) + \frac{\cos x}{\sin x}\,x + \ln(\sin x)\Big) \\ &= x^{\sin x}\,(\sin x)^x\,\Big(\frac{\sin x}{x} + \ln(x)\cos(x) + \frac{x}{\tan x} + \ln(\sin x)\Big)\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 61

a) Wir wissen aus einer früheren Übung, dass für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$a^l - b^l = (a-b)(a^{l-1} + a^{l-2}b + \cdots ab^{l-2} + b^{l-1}).$$

und damit

$$(x_0+h)^l - x_0^l = h\left(x_0^{l-1} + (x_0+h)x_0^{l-2} + \cdots (x_0+h)^{l-2}\right) = h\left(\sum_{k=0}^{l-1} x_0^k (x_0+h)^{l-(k+1)}\right).$$

Wir erhalten daraus

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} x_0^k (x_0+h)^{n-(k+1)}\right).$$

b) Mit Hilfe des letzten Teils erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{((x_0+h)^n - x_0^n)}{h} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} x_0^k (x_0+h)^{n-(k+1)}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x_0^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} x_0^k \left((x_0+h)^{n-(k+1)} - x_0^{n-(k+1)}\right)\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x_0^{n-1} + h \cdot g(h)\end{aligned}$$

wobei

$$g(h) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} x_0^k \frac{(x_0+h)^{n-(k+1)} - x_0^{n-(k+1)}}{h}\right).$$

Um g abzuschätzen, wählen wir zunächst ein $|x_0| < \tilde{r} < r$ und h so klein, dass $|x_0 + h| \leqslant \tilde{r}$. Mit der Ungleichung

$$\frac{\left|(x_0+h)^l - x_0^l\right|}{h} = |\sum_{k=0}^{l-1} x_0^k (x_0+h)^{l-(k+1)}| \leqslant l\tilde{r}^{l-1}$$

erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_0^k \frac{(x_0+h)^{n-(k+1)} - x_0^{n-(k+1)}}{h} \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} (n-(k+1))\tilde{r}^{n-2} \leqslant n(n-1)\tilde{r}^{n-2}$$

und damit

$$g(h) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)\tilde{r}^n < \infty$$

aufgrund von Übung 41. Also folgt

$$hg(h) \xrightarrow{h\to 0} 0$$

c) Diese Aussage folgt nun unmittelbar aus Teil (ii), denn

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^n + hg(h)\right) = \lim_{h\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^n.$$

Aufgabe 62

a) Sei $a \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Da $f : x \mapsto \cos(x^2)$ als Komposition stetiger Funktionen auf $\mathbb{R}$ stetig ist, gibt es zu jedem $h > 0$ nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung ein $\xi_h \in [a-h, a+h]$ so, dass gilt

$$\int_{a-h}^{a+h} \cos(x^2)\,dx = \int_{a-h}^{a+h} 1\,dx\ \cos(\xi_h^2) = \big((a+h) - (a-h)\big)\cos(\xi_h^2) = 2h\cos(\xi_h^2)\,.$$

Also ist $\frac{1}{h}\int_{a-h}^{a+h} \cos(x^2)\,dx = 2\cos(\xi_h^2)$ für jedes $h > 0$. Für $h \to 0+$ konvergiert ξ_h gegen a und wegen der Stetigkeit von f konvergiert damit auch $\cos(\xi_h^2)$ gegen $\cos(a^2)$. Zusammen folgt

$$\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\int_{a-h}^{a+h} \cos(x^2)\,dx = 2\cos(a^2)\,.$$

b) Sei $a \in \mathbb{R}$ fest. Für jedes $h > 0$ existiert nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung ein $\xi_h \in [a+h, a+2h]$ mit

$$\int_{a+h}^{a+2h} \ln x \; dx = ((a+2h) - (a+h)) \ln \xi_h = h \ln \xi_h \, .$$

Demzufolge ist $\frac{1}{h} \int_{a+h}^{a+2h} \ln x \; dx = \ln \xi_h$. Mit $h \to \infty$ geht ξ_h gegen ∞ und damit strebt auch $\ln \xi_h$ gegen ∞. Also konvergiert der Ausdruck $\frac{1}{h} \int_{a+h}^{a+2h} \ln x \; dx$ für $h \to \infty$ nicht.

c) Wir zeigen, dass der Grenzwert nicht existiert. Sei dazu $h > 1$ und $[h]$ bezeichne die größte natürliche Zahl, die kleiner oder gleich h ist, d.h. $[h] := \max\{k \in \mathbb{N} : \; k \leqslant h\}$.

Wir zerlegen das Intervall $[1, [h]]$ in die $[h]-1$ Intervalle $[n, n+1]$ für $n = 1, 2, \ldots, [h]-1$. Jedes dieser Intervalle hat die Länge 1. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung existiert für jedes dieser Intervalle ein $\xi_n \in [n, n+1]$ mit $\int_n^{n+1} 1/x \; dx = 1/\xi_n \geqslant 1/(n+1)$.

[Hier kann man auch mit der Monotonie des Integrals argumentieren: Wegen $1/x \geqslant 1/(n+1)$ für alle $x \in [n, n+1]$ gilt nach Satz 10.3 (1): $\int_n^{n+1} 1/x \; dx \geqslant \int_n^{n+1} 1/(n+1) \; dx = 1/(n+1)$.]

Damit gilt

$$\int_1^h \frac{1}{x} \, dx = \int_1^{[h]} \frac{1}{x} \, dx + \underbrace{\int_{[h]}^h \frac{1}{x} \, dx}_{\geqslant 0} \geqslant \int_1^{[h]} \frac{1}{x} \, dx = \sum_{n=1}^{[h]-1} \int_n^{n+1} \frac{1}{x} \, dx \geqslant \sum_{n=1}^{[h]-1} \frac{1}{n+1} = \sum_{k=2}^{[h]} \frac{1}{k} \, .$$

Für $h \to \infty$ und damit $[h] \to \infty$ konvergiert diese Summe nicht [$\to$ harmonische Reihe]. Deshalb existiert der Grenzwert $\lim_{h\to\infty} \int_1^h \frac{1}{x} \, dx$ nicht.

Dies lässt sich auch mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung einsehen, denn für jedes $h > 0$ gilt

$$\int_1^h \frac{1}{x} \, dx = \ln x \Big|_1^h = \ln h - \ln 1 = \ln h \to \infty \qquad \text{für } h \to \infty \, .$$

d) Wir zeigen, dass der Grenzwert 0 ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$.

Wir zerlegen das Intervall $[0, 1]$ in zwei Teilintervalle so, dass der Betrag des Integrals über ein Teilintervall durch $\varepsilon/2$ abgeschätzt werden kann.

Das erste Intervall soll die Länge $\varepsilon/2$ haben. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es ein $\xi \in [0, \varepsilon/2]$ mit

$$\Big| \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} h^x \cos x \; dx \Big| = \Big| \frac{\varepsilon}{2} \Big| \; |h^\xi| \; |\cos \xi| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für jedes } h \in (0,1) \, .$$

Für $\xi \in [\varepsilon/2, 1]$ gilt $\xi \geqslant \varepsilon/2$. Sei nun $h > 0$ so klein, dass $h^{\varepsilon/2} < \varepsilon/2$ ist. Dann gilt nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung für ein $\xi \in [\varepsilon/2, 1]$

$$\Big| \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^1 h^x \cos x \; dx \Big| \leqslant \underbrace{(1 - \varepsilon/2)}_{\leqslant 1} |h^\xi| \; |\cos \xi| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zusammen können wir abschätzen

$$\Big| \int_0^1 h^x \cos x \, dx \Big| = \Big| \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} h^x \cos x \, dx + \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^1 h^x \cos x \, dx \Big| \leqslant \Big| \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} h^x \cos x \, dx \Big| + \Big| \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^1 h^x \cos x \, dx \Big| < \varepsilon.$$

Also ist $\lim\limits_{h\to 0+} \int_0^1 h^x \cos x \, dx = 0$.

e) Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es ein $\xi_h \in [-\pi/2, \pi/2]$ so, dass

$$\lim_{h\to 0+} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (e^{(hx)^2} - 2)\cos^2(x)\,dx = \left(e^{h\xi^2} - 2\right) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(x)dx.$$

Mit

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(x)dx = \pi/2$$

erhalten wir

$$\lim_{h\to 0+} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (e^{(hx)^2} - 2)\cos^2(x)\,dx = \left(e^{h\xi_h^2} - 2\right)\pi/2 \xrightarrow{h\to 0} -\pi/2,$$

da $h\xi_h \to 0$.

Aufgabe 63

Wir berechnen zuersten die Schnittwinkel φ_g und φ_f der Funktionen f und g mit der x-Achse. Aus der Definition der Tangens folgt

$$\tan(\varphi_f) = f' \qquad \tan(\varphi_g) = g'$$

und damit

$$\varphi_f = \arctan(f') \qquad \arctan(g').$$

Der Winkel φ ergibt sich also zu

$$\varphi = \varphi_f - \varphi_g = \arctan(f') - \arctan(g').$$

Falls der Winkel nicht gerade $\pm\pi/2$ beträgt, so kann dieser Winkel auch mit nur einer Auswertung der Umkehrfunktion des Tangens berechnet werden. Dazu verwendet man das Additionstheorem des Tangens, um

$$\tan(\varphi) = \tan(\varphi_f - \varphi_g) = \frac{\tan\varphi_f - \tan\varphi_g}{1 + \tan\varphi_g \tan\varphi_g} = \frac{f' - g'}{1 + f'g'}$$

zu erhalten. Damit gilt

$$\varphi = \arctan\left(\frac{f' - g'}{1 - f'g'}\right).$$

Aufgabe 64

a) Offensichtlich gilt $\|f\|_\infty \geqslant 0$. Zum einen ist $\|0\|_\infty = 0$. Zum anderen bedeutet $\|f\|_\infty = 0$ aufgrund der Definition, dass 0 eine obere Schranke für $\{|f|(x)|x \in D\}$ ist. Damit $|f(x)| = 0$ für alle $x \in D$ also $f(x) = 0$.

b) Offensichtlich gilt die Aussage für $\lambda = 0$, da dann beide Seiten der Gleichung gleich 0 sind. Es sei also im Folgenden $\lambda \neq 0$ und $M = \|f\|_\infty$. Dann gilt

$$|\lambda f(x)| = |\lambda||f(x)| \leqslant |\lambda|M.$$

Also ist $|\lambda|M$ eine obere Schranke von $\{|\lambda f(x)| : x \in D\}$ und damit

$$\|\lambda f\|_\infty \leqslant |\lambda|M = |\lambda|\|f\|. \tag{1}$$

Da $\lambda \neq 0$ können wir (1) auf λf und $\frac{1}{\lambda}$ anstelle von f und λ an und erhalten

$$\|f\|_\infty = \|\frac{1}{\lambda}(\lambda f)\|_\infty \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\|\lambda f\|_\infty.$$

also

$$|\lambda|\|f\|_\infty \leqslant \|\lambda f\|_\infty. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt

$$\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\|f\|.$$

c) Es sei

$$M := \sup\{|f(x)| + |g(x)| | x \in D\}$$

Aus der Dreiecksungleichung für komplexe Zahlen folgt

$$|f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant M \qquad \forall x \in D.$$

Damit ist M obere Schranke an $\{|f(x) + g(x)| | x \in D\}$ und damit

$$\|f + g\|_\infty = \sup\{|f(x) + g(x)| | x \in D\} \leqslant M.$$