Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. Simon Blatt

WS 2012/13

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 15. Übungsblatt

Aufgabe 71

a) Hier kann man sofort eine Stammfunktion hinschreiben:

$$\int_0^1 (1+2x)^3\,dx = \tfrac{1}{8}(1+2x)^4\,\big|_0^1 = \tfrac{1}{8}(3^4-1^4) = 10\,.$$

b) Wir zerlegen das Intervall:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 |x-1|\,dx &= \int_{-2}^1 |x-1|\,dx + \int_1^2 |x-1|\,dx = \int_{-2}^1 (1-x)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx\\ &= \big(x-\tfrac{1}{2}x^2\big)\Big|_{-2}^1 + \big(\tfrac{1}{2}x^2-x\big)\Big|_1^2\\ &= \big(1-\tfrac{1}{2}\big)-(-2-2)+(2-2)-\big(\tfrac{1}{2}-1\big) = 5\,.\end{aligned}$$

c) Mit zweimaliger partieller Integration ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_{\pi/4}^{\pi/2} e^x\cos(x)\,dx &= \big[e^x\cos(x)\big]_{\pi/4}^{\pi/2} + \int_{\pi/4}^{\pi/2} e^x\sin(x)\,dx\\ &= \big[e^x\cos(x)+e^x\sin(x)\big]_{\pi/4}^{\pi/2} - \int_{\pi/4}^{\pi/2} e^x\cos(x)\,dx\end{aligned}$$

und somit

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} e^x\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\big[e^x\cos(x)+e^x\sin(x)\big]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{1}{2}\big(e^{\pi/2}-\tfrac{2}{\sqrt{2}}\,e^{\pi/4}\big)\,.$$

d) Hier kann man eine Stammfunktion leicht finden:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{9-4x^2}}\,dx &= -\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{-8x}{2\sqrt{9-4x^2}}\,dx\\ &= -\tfrac{1}{4}\sqrt{9-4x^2}\,\Big|_0^1 = -\tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-\sqrt{9}\,) = \tfrac{1}{4}(3-\sqrt{5}\,)\,.\end{aligned}$$

e) Hier wenden wir die Substitutionsregel mit $g(t)=\sqrt{t}$ an. Wir ersetzen also $\sqrt{t}$ durch x und $g'(t)\,dt = (2\sqrt{t}\,)^{-1}\,dt$ durch dx. Dabei müssen wir auch die Integrationsgrenzen anpassen: $t=1$ entspricht $x=g(1)=1$ und $t=4$ entspricht $x=g(4)=2$.

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}\,(1+\sqrt{t}\,)}\,dt &= \int_1^4 \frac{2}{1+\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt\\ &= \int_1^2 \frac{2}{1+x}\,dx = 2\ln|1+x|\,\big|_1^2 = 2\big(\ln(3)-\ln(2)\big) = 2\ln\tfrac{3}{2}\,.\end{aligned}$$

f) Um dieses Integral zu berechnen, verwenden wir partielle Integration für $f(x) = \ln x$ und $g'(x) = x$. Mit $f'(x) = x^{-1}$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ folgt

$$\begin{aligned}\int_1^e x \ln x \, dx &= \int_1^e f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\big|_1^e - \int_1^e f'(x)g(x)\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}x^2 \ln x\big|_1^e - \int_1^e \tfrac{1}{2}x^2 x^{-1}\,dx = \tfrac{1}{2}(e^2 \ln e - \ln 1) - \int_1^e \tfrac{1}{2}x\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}e^2 - \left(\tfrac{1}{4}x^2\right)\big|_1^e = \tfrac{1}{2}e^2 - \tfrac{1}{4}(e^2-1) = \tfrac{1}{4}(e^2+1)\,.\end{aligned}$$

g) Sei $k \in \mathbb{Z}$. Wir betrachten zunächst das Integral ohne Betrag:

$$\begin{aligned}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin x\,dx &= -\cos x\big|_{(k-1)\pi}^{k\pi} = -\cos(k\pi) + \cos((k-1)\pi) \\ &= -(-1)^k + (-1)^{k-1} = (-(-1)+1)(-1)^{k-1} = 2(-1)^{k-1}\,.\end{aligned}$$

Da die Sinusfunktion ihre Nullstellen genau in $k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ hat und stetig ist, ist sin auf dem ganzen Intervall $[(k-1)\pi, k\pi]$ entweder $\geqslant 0$ oder $\leqslant 0$. Folglich gilt

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x|\,dx = \left|\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin x\,dx\right| = 2\,.$$

h) Die Substitution $e^{x^2} = t$, $dt = 2xe^{x^2}\,dx$ führt auf

$$\int_0^1 x\,e^{2x^2}\sin(e^{x^2})\,dx = \frac{1}{2}\int_1^e t\sin t\,dt\,.$$

Mithilfe von partieller Integration ist

$$\frac{1}{2}\int_1^e t\sin t\,dt = -\frac{t}{2}\cos t\Big|_1^e + \frac{1}{2}\int_1^e \cos t\,dt = \left[\frac{-t\cos t + \sin t}{2}\right]_1^e = -\frac{e}{2}\cos e + \frac{\sin e}{2} + \frac{\cos 1 - \sin 1}{2}\,.$$

i) Wir substituieren zunächst $t = \sqrt{x}$, d.h. $x = t^2$. Dann ist $dx = 2t\,dt$ und aus $x : 1 \to 4$ ergibt sich $t : 1 \to 2$

$$\int_1^4 \arctan\sqrt{\sqrt{x}-1}\,dx = \int_1^2 \arctan(\sqrt{t-1}\,)\cdot 2t\,dt\,;$$

nun substituieren wir $u = \sqrt{t-1}$, also $t = u^2+1$, $dt = 2u\,du$, $t : 1 \to 2$ wird zu $u : 0 \to 1$,

$$= \int_0^1 \arctan(u)\cdot 2(u^2+1)\cdot 2u\,du = \int_0^1 (4u^3+4u)\arctan(u)\,du\,.$$

(Natürlich hätten wir die beiden Substitutionen auch zu einer zusammenfassen können.) Dann führen wir eine partielle Integration aus mit $f(u) = \arctan(u)$ und $g'(u) = 4u^3 + 4u$:

$$\begin{aligned}&= (u^4+2u^2)\arctan(u)\big|_0^1 - \int_0^1 (u^4+2u^2)\frac{1}{1+u^2}\,du \\ &= 3\arctan(1) - \int_0^1 \frac{(u^2+1)^2-1}{1+u^2}\,du = \tfrac{3}{4}\pi - \int_0^1 (u^2+1)\,du + \int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\,du \\ &= \tfrac{3}{4}\pi - \left(\tfrac{1}{3}u^3+u\right)\big|_0^1 + \arctan(u)\big|_0^1 = \tfrac{3}{4}\pi - \tfrac{4}{3} + \tfrac{1}{4}\pi = \pi - \tfrac{4}{3}\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 72

a) Wir verwenden partielle Integration mit $f(x) = \arcsin x$ und $g'(x) = 1$:

$$\begin{aligned}\int \arcsin x\, dx &= \int 1 \cdot \arcsin x\, dx = x \arcsin x - \int x \arcsin'(x)\, dx \\ &= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}\,.\end{aligned}$$

b) Hier substituieren wir $u = e^x$. Dies liefert $du = e^x\, dx$ und damit

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\, dx = \int \frac{1}{u^2+1}\, du\Big|_{u=e^x} = \arctan(u)\Big|_{u=e^x} = \arctan(e^x)\,.$$

c) Wir substituieren $u = 1 - x$. Dies liefert $du = (-1)\, dx$, also

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1-x}}\, dx &= \int \frac{1-u}{\sqrt{u}}(-1)\, du\Big|_{u=1-x} = \int (u^{1/2} - u^{-1/2})\, du\Big|_{u=1-x} = \tfrac{2}{3}u^{3/2} - 2u^{1/2}\Big|_{u=1-x} \\ &= \tfrac{2}{3}(1-x)^{3/2} - 2(1-x)^{1/2}\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 73

a) Aus $0 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ für alle $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ folgt

$$a_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n+1} dx \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx = a_n$$

für $n \in \mathbb{N}_0$.

b) Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$. Partielle Integration führt auf

$$\begin{aligned}a_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n-1} \cdot (\sin x)\, dx \\ &= \big[(\sin x)^{n-1} \cdot (-\cos x)\big]_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)(\sin x)^{n-2} \cos x \cdot (-\cos x)\, dx \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n-2} (\cos x)^2\, dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n-2}(1 - \sin^2 x)\, dx \\ &= (n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n-2}\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n\, dx\right) = (n-1)(a_{n-2} - a_n)\,,\end{aligned}$$

also

$$a_n = \frac{n-1}{n}\, a_{n-2}\,.$$

Außerdem gilt

$$a_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2}$$

und

$$a_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\tfrac{\pi}{2} - (-\cos 0) = 1\,.$$

c) Ist n gerade, d.h. existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 2k$, so gilt

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{n-1}{n}\, a_{n-2} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2}\, a_{n-4} = \ldots = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2}\, a_0 \\ &= \frac{(2k-1)\cdot(2k-3)\cdot(2k-5)\cdot\ldots\cdot 1}{2k \cdot 2(k-1) \cdot 2(k-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}\, \frac{\pi}{2} = \frac{(2k)!}{2^{2k}\cdot(k!)^2}\, \frac{\pi}{2}\,.\end{aligned}$$

Ist n ungerade, d.h. existiert $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $n = 2k+1$, so gilt

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n-1}{n}\, a_{n-2} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2}\, a_{n-4} = \ldots = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{3}\, a_1 \\ &= \frac{(n-1)^2 \cdot (n-3)^2 \cdot (n-5)^2 \cdot \ldots \cdot 2^2}{n!} \cdot 1 \\ &= \frac{(2k)^2 \cdot (2(k-1))^2 \cdot (2(k-2))^2 \cdot \ldots \cdot (2 \cdot 1)^2}{(2k+1)!} = \frac{2^{2k} \cdot (k!)^2}{(2k+1)!}\,. \end{aligned}$$

Diese expliziten Darstellungen von a_n bestätigt man leicht mit Hilfe von vollständiger Induktion.

Anmeldeschluss zur Klausur: Freitag, 08.02.2013 (Vorlesungsende WS 12/13)